Carnegie Institute of Technology Library

PITTSBURGH, PA.

Rules for Lending Books:

1. Reserved books may be used only in the library until 8 P. M. After that hour they may be requested for outside use, due the following morning at 9:30. Ask at the desk about week-end borrowing privileges.

2. Books not of strictly reference nature, and not on reserve may be borrowed for longer periods on request. **Date due** is stamped on date slip in book.

3. A fine of five cents an hour is charged on overdue reserved book. Two cents a day fine is charged on overdue unreserved books.

Arts Branch Library

Most of the books in this collection are for use in the library only. A few books and mounted plates may be borrowed. Ask the assistant in charge.



B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXV

THEORIE DER LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN

UNTER MITWIRKUNG VON
ALF GULDBERG
IN KRISTIANIA
VON
GEORG WALLENBERG
IN CHARLOTTENBURG

MIT 5 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Vorrede und historische Einleitung.

Während die Theorie der linearen Differentialgleichungen seit geraumer Zeit ein festgefügtes Gebäude darstellt, das heute bereits eine imposante Größe besitzt, konnte bis vor kurzem von einer eigentlichen Theorie der linearen Differenzengleichungen überhaupt noch nicht gesprochen werden, da nur einzelne, nicht zusammenhängende Untersuchungen über diesen Gegenstand vorhanden waren.

Lange bekannt[1]) ist die Integration der homogenen linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, d. h. die Theorie der sogenannten rekurrenten Reihen in engerem Sinne; doch erst *Lagrange* hat sie systematisch behandelt. Dieser ermöglichte dann durch seine Methode der „Variation der Konstanten" die Lösung der *nicht* homogenen linearen Differenzengleichungen durch die Integration der zugehörigen „reduzierten" (homogenen) Gleichung und bloße Summationen (vgl. *3. Kap.*, V). Wichtige Hilfsmittel für die Berechnung des allgemeinen Gliedes einer rekurrenten Reihe bzw. für die Integration der linearen Differenzengleichungen schuf *Laplace* durch seine Theorie der erzeugenden Funktionen[2]), besonders aber durch die — auch bei den linearen Differentialgleichungen eine große Rolle spielende — nach ihm benannte „*Laplace*sche Transformation", durch welche die Lösung der linearen Differenzengleichungen (in Form bestimmter Integrale, aufgefaßt als Funktionen eines Parameters) auf die Integration linearer Differentialgleichungen zurückgeführt wird. Insbesondere die linearen Differenzengleichungen mit *linearen* Koeffizienten, die sogenannten „*Laplace*schen Differenzengleichungen", bei denen die zu lösende lineare Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist, konnten auf diese Weise vollständig integriert und die Lösungen der *Laplace*schen Gleichungen zweiter Ordnung, wie zuerst *Thomae* (1869) näher ausführte, durch hypergeometrische Reihen dargestellt werden. Später ist diese Transformation u. a. eingehend von *Pincherle* behandelt worden, der besonders auf das dualistische Prinzip hinwies, nach welchem

1) Etwa seit 1700 (vgl. die Literaturangaben bei *Andoyer*, **1.**, S. 69, Note 48); das erste bekannte Beispiel einer rekurrenten Reihe findet sich bereits bei *Leonardo Pisano (Fibonacci)*, Liber abaci 1228 (vgl. *7. Kap.*, III, A).

2) Vgl. *Andoyer*, **1.**, S. 75.

die Lösung linearer Differenzengleichungen auf diejenige linearer Dif
rentialgleichungen und umgekehrt zurückgeführt werden kann.

Ferner existieren aus älterer Zeit zahlreiche Arbeiten teils größer
teils kleineren Umfangs über einzelne lineare Differenzengleichung
besonders erster und zweiter Ordnung, deren Integration durch v
schiedenartige formale Prozesse meist rekurrenter Natur geleistet wir
dabei beschränken sich aber die meisten Autoren auf positive gan
zahlige Werte (bzw. auf die in der arithmetischen Reihe x_0, $x_0 +$
$x_0 + 2h$, ... enthaltenen Werte) der unabhängigen Veränderliche
wie es dem Standpunkte des Differenzenkalküls entspricht. D
Lösungen nur weniger linearer Differenzengleichungen erster u
zweiter Ordnung wurden wirklich durch explizite analytische Au
drücke dargestellt und funktionentheoretisch durchforscht; zu dies
gehört vor allen Dingen die einer homogenen linearen Differenze
gleichung erster Ordnung genügende Gammafunktion, die bereits v
Euler, besonders aber von *Gauß* in seiner klassischen Arbeit üb
die hypergeometrische Reihe eingehend behandelt worden ist. D
Gammafunktion spielt in der Theorie der linearen Differenzengleichung
eine hervorragende Rolle (vgl. *1. Kap.*, II, C und D, sowie das *10. Ka*
und die Schlußbetrachtung); diese Funktion, der *Legendre* den Nam
„Gammafunktion" gab, gehört nebst ihrer logarithmischen Ableitun
wie schon *Gauß* bemerkt, zu den interessantesten Gebilden der ganz
Analysis; die Literatur über sie ist inzwischen ungeheuer angewachs
und in dem trefflichen Handbuche von *Nielsen*, dem auch der Unte
zeichnete zahlreiche Literaturangaben und manche wertvolle A
regungen verdankt, erschöpfend bearbeitet worden.

Im übrigen datieren die funktionentheoretischen Arbeiten üb
die Lösungen linearer Differenzengleichungen erst aus neuerer Ze
Weierstraß dehnt die Untersuchung der Gammafunktion auf komple
Variable aus und wird durch ihre Produktdarstellung zu seiner b
rühmten Theorie der ganzen transzendenten Funktionen geführ
Guichard stellt einen später von *H. Weber* wiedergefundenen Integra
ausdruck für die „Summe" einer Funktion auf, aus dem sich nac
*Cauchy*schen Prinzipien der von *Plana* und *Abel* gegebene Integra
ausdruck ergibt[1]), und beweist mittels desselben, daß die Summ
einer ganzen transzendenten Funktion, abgesehen von einer peri
dischen Funktion, wieder eine ganze transzendente Funktion ist; da
selbe beweisen später auf andere Weise (mittels der *Bernoulli*sche
Funktion) *Appell* und *Hurwitz*. Diese sowie besonders *Mellin* un
Barnes haben die Lösungen der linearen Differenzengleichungen erst
Ordnung für komplexe Variable eingehend untersucht. — *Hölder* be

1) Dieser wiederum führt unmittelbar zu der lange bekannten *Mac Laurin*
*Euler*schen Summenformel (vgl. *1. Kap.*, II, B, Schluß).

eist, daß die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung
enügt, und *Barnes* erweitert diesen Satz auf die Lösungen beliebiger
nearer Differenzengleichungen erster Ordnung mit algebraischen Koeffi-
.enten; damit war gezeigt, daß bereits die linearen Differenzenglei-
ıungen erster Ordnung *wesentlich neue transzendente Funktionen* de-
nieren.

Soweit die linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. Was
.e homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung an-
etrifft, so hat bereits *Boole* in seinem „Treatise" Ansätze zu Reihen-
ıtwickelungen ihrer Lösungen gemacht; doch fehlt fast durchweg die
.auptsache — der Konvergenzbeweis. Weiter sind dann die so-
enannten hypergeometrischen Differenzengleichungen zweiter Ordnung,
elche aufs engste mit der *Gauß*schen hypergeometrischen Reihe zu-
ımmenhängen — sind doch die Beziehungen zwischen den „contiguen"
unktionen nichts anderes als lineare Differenzengleichungen zweiter
rdnung —, wie schon erwähnt, von *Thomae* und später in ähnlicher
'eise, aber nicht so ausführlich, von *Webb* und *Barnes*, am elegan-
sten und kürzesten aber von *Heymann* behandelt worden; eine sehr
ırgfältige Darstellung der Bedeutung der hypergeometrischen Reihe
.r die Integration der linearen Differenzengleichungen zweiter Ord-
ıng hat *Pincherle* (4^b) gegeben.

Über die linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung mit
ıriablen Koeffizienten war — abgesehen von den *Laplace*schen Glei-
ıungen — bis in die neueste Zeit in funktionentheoretischer Beziehung
hr wenig bekannt. Bahnbrechend ist hier eigentlich *Poincaré* gewesen,
ır in einer größeren Abhandlung über das Verhalten der Integrale
ıearer Differentialgleichungen im Unendlichen gelegentlich diese Frage
ıch für Differenzengleichungen behandelt; und obwohl seine Dar-
ellung mehrere Fehler enthält und die Resultate nicht ganz präzis
ıd, so habe ich mich aus dem obigen sowie aus dem weiteren
runde, daß hier mit ganz wenigen Hilfsmitteln und ohne Benutzung
.derweitiger Disziplinen durch bloße strenge Fallunterscheidung ver-
.ltnismäßig viel erreicht wird, entschlossen, dem *Poincaré*schen Satze
ı besonderes Kapitel (9) zu widmen[1]), den Beweis von den Fehlern zu
inigen und die Resultate durch die tiefgehenden Untersuchungen von
incherle, Horn, Ford, Perron und *Nörlund* zu ergänzen. Dieser Satz
stattet dann zwei sehr schöne Anwendungen: die approximative
isung homogener linearer Differenzengleichungen von *Pincherle* und
e Lösung homogener linearer Differenzengleichungen zweiter Ord-
.ng durch konvergente unendliche Kettenbrüche[2]) von *Nörlund*. Eine
rekte Fortsetzung der *Poincaré*schen Untersuchung bilden ferner

1) Man beachte die Bemerkungen dazu am Schlusse des Werkes.

2) Derartige Kettenbruchentwicklungen gab bereits, doch ohne Konvergenz-
weis, *Gauß* und später allgemeiner *Pincherle*.

die asymptotischen Darstellungen der Lösungen homogener linearer Differenzengleichungen von *Horn*, *Galbrun* und *Nörlund* (vgl. 10. Kap., III).

Inzwischen erfuhr aber ein anderes Gebiet unserer Disziplin eine mächtige Förderung, nämlich die *formale* Seite der Theorie der linearen Differenzengleichungen, insbesondere soweit sie sich auf die Analogien mit den algebraischen Gleichungen und auf die entsprechenden Analogien mit den linearen Differentialgleichungen erstreckt. Hier hat nach *Casorati* hauptsächlich *Pincherle* mit seinen Schülern *Bortolotti* und *Amaldi* den Grundstein gelegt und besonders im 10. Kapitel seines Buches über die distributiven Operationen[1]) gewissermaßen das Gerüst für den Aufbau einer solchen Theorie errichtet. Dann haben *Heymann*, *Guldberg* und der Unterzeichnete den Bau soweit gefördert, daß wenigstens *dieser* Teil der Theorie der linearen Differenzengleichungen jetzt ungefähr auf dem gleichen Niveau steht wie der entsprechende bei den linearen Differentialgleichungen: wir erwähnen hier namentlich die mannigfachen Determinantenbeziehungen, die Reduktion und Zerlegung homogener linearer Differenzengleichungen, die vielfachen Lösungen, die Theorie der Adjungierten und Assoziierten, Multiplikatoren, Kettenbruchverfahren, Resultante, den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste Vielfache, die Iteration und Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke, den Irreduktibilitätsbegriff, die Theorie der invarianten Funktionen, die Transformationstheorie und endlich die Gruppentheorie (Kap. 2—6). Die Analogien zwischen den formalen Theorien der linearen Differential- und Differenzengleichungen sind so weitreichend, daß viele Partien direkt — natürlich cum grano salis — von den Differentialgleichungen auf die Differenzengleichungen übertragen werden können; das hat meinen Mitarbeiter, Herrn *Guldberg*, veranlaßt, einzelne Gebiete, wie z. B. die Gruppentheorie, die in dem Handbuche von *L. Schlesinger* sowie in dem „Traité" von *Picard* für Differentialgleichungen eingehend dargestellt worden sind, ganz kurz zu behandeln, während er die Analogien der neueren Untersuchungen von *Heffter* und *Loewy*, die in dem *Schlesinger*schen Handbuche noch nicht enthalten sind, ausführlicher auseinandergesetzt bzw. in Form von Aufgaben und zu beweisenden Sätzen wiedergegeben hat.

Dagegen schienen der funktionentheoretischen Untersuchung der Lösungen einer linearen Differenzengleichung beliebiger Ordnung bzw. ihrer Darstellung durch analytische Ausdrücke unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenzustehen, insbesondere der Aufstellung formell genügender, in einem gewissen Bereiche konvergenter Reihen, ähnlich den Potenzreihen, durch die *Cauchy* für die Theorie der Differential-

1) *Pincherle* (u. *Amaldi*), **9**.

gleichungen die Grundlage geschaffen hatte. Die Überwindung dieser Schwierigkeiten war erst möglich, nachdem sich die Überzeugung Bahn gebrochen hatte, daß bei der Integration der linearen Differenzengleichungen nicht die Potenzreihen, sondern die bereits von *Stirling* behandelten, seitdem aber lange Zeit vernachlässigten Fakultätenreihen sowie auch die Partialbruchreihen die dominierende Rolle spielen. Durch diese Einsicht gelang es erst in allerneuester Zeit, nachdem bereits *Mellin*[1]) wertvolle Ansätze gemacht hatte, aber nicht bis zum Endziele gelangt war, dem jungen dänischen Astronomen *Nörlund*, der mir seine Untersuchungen brieflich mitteilte[2]), für gewisse Normalformen von homogenen linearen Differenzengleichungen, deren Koeffizienten in einem gewissen Gebiete konvergente Fakultätenreihen sind, nach *Cauchy*schen Prinzipien mittels einer Majorantenreihe den Beweis der Konvergenz ihrer ebenfalls durch Fakultätenreihen dargestellten Lösungen zu erbringen, indem er sich dabei auf die neueren Untersuchungen von *Jensen*, *Nielsen* und *Landau* über die Konvergenz der Fakultätenreihen stützte (vgl. *10. Kap.*, IV).

In Betreff der *nicht* homogenen linearen Differenzengleichungen seien noch die Arbeiten von *Heymann* erwähnt, welche in vielen Fällen die Aufstellung eines Partikularintegrals und damit die Zurückführung auf homogene Gleichungen lehren, ohne auf die Methode der Variation der Konstanten, die wegen der mit ihr verbundenen Summationen meist nur formale Bedeutung hat, zu rekurrieren (*8. Kap.*, II); dabei ergeben sich Anknüpfungspunkte mit den in neuester Zeit im Vordergrunde des Interesses stehenden Integralgleichungen (*8. Kap.*, II, B).

In dem vorliegenden Buche wird nun auf Grund der oben in großen Zügen skizzierten wichtigsten Forschungsergebnisse zum ersten Male der Versuch gemacht, eine zusammenhängende Theorie der linearen Differenzengleichungen aufzubauen. Dabei betonen wir von vornherein grundsätzlich den Standpunkt, daß wir diese Theorie über das Niveau der rekurrenten Reihen erheben und sie an die Seite der Theorie der linearen Differentialgleichungen stellen wollen[3]): wir betrachten also die unabhängige Veränderliche als *stetig* variabel und haben deshalb solche Untersuchungen bevorzugt, welche diesen Standpunkt entweder einnehmen oder wenigstens ermöglichen. Damit hängt zusammen, daß die in dem allgemeinen Integral auftretenden willkürlichen „Kon-

---

1) Acta Math. 9 (1887).

2) Ein kurzer Auszug ist in den C. R. 15. Nov. 1909 erschienen; ausführlichere Darstellung in der inzwischen veröffentlichten Diss. Kopenhagen 1910.

3) Wie befruchtend übrigens das tiefere Studium der rekurrenten Reihen seinerseits auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen wirkt, haben besonders in neuerer Zeit die Arbeiten von *Pincherle*, *Horn* und *Perron* zur Genüge bewiesen.

stanten“ keine wirklichen Konstanten, sondern periodische Funktionen von der Periode 1 sind, was zuweilen zu eigentümlichen, für die Differenzengleichungen charakteristischen Schwierigkeiten führt, die bisher noch nicht genügend beachtet zu sein scheinen und die sich hauptsächlich daraus ergeben, daß die Wurzeln algebraischer Gleichungen, deren Koeffizienten „Konstanten“ sind, nicht selber „Konstanten“ zu sein brauchen (vgl. *6. Kap.*, IV). Von den vorhandenen Lehrbüchern über Differenzenrechnung trägt wohl noch am meisten der „Treatise“ von *Boole* unserem Standpunkt Rechnung, ein wenig auch bereits der noch ältere „Traité“ von *Lacroix*, während das — im übrigen vortreffliche — Lehrbuch von *Markoff* ebenso wie das von *Seliwanoff* sowie dessen Enzyklopädiebericht (französische Bearbeitung von *Andoyer*) vollständig auf dem Standpunkt des Interpolations- und Differenzenkalküls steht.

Bei der Anordnung des Stoffes war außer dem ökonomischen hauptsächlich der genetische Standpunkt maßgebend, der sich schon daraus von selbst ergab, daß mehrere wichtige Arbeiten erst während der Abfassung unseres Werkes erschienen. Das vorliegende Buch besteht aus zwei getrennten Teilen, deren erster die grundlegenden Begriffe und die formalen Theorien enthält, während der zweite, funktionentheoretische Teil die eigentliche Integration der linearen Differenzengleichungen durch analytische Ausdrücke behandelt. Für die Aufnahme in unser Lehrbuch kamen nur solche Untersuchungen in Betracht, die zu endgültigen, brauchbaren Resultaten führen; insbesondere für Arbeiten über unendliche Prozesse (Integraldarstellungen, Entwicklungen in unendliche Produkte, Reihen, Kettenbrüche usw.) war der Nachweis der Konvergenz (bzw. des asymptotischen Verhaltens) die conditio sine qua non ihrer Berücksichtigung. Zahlreiche Beispiele, die möglichst aus Originalarbeiten entnommen sind, dienen durchweg zur Illustrierung und Anwendung der dargestellten allgemeinen Theorien.

Als ich dieses Buch zu schreiben begann, waren die oben genannten Arbeiten von *Nörlund* erst im Entstehen begriffen. Um daher für die im ersten Teile behandelten formalen Theorien durch den Nachweis der Existenz eines Fundamentalsystems von Lösungen homogener linearer Differenzengleichungen eine feste Grundlage zu schaffen, führte ich diesen Existenzbeweis zunächst ohne Rücksicht auf die analytische Darstellbarkeit der Lösungen ganz im Sinne der Berechnung der Glieder einer rekurrenten Reihe, wie sie z. B. *Markoff* in seinem Lehrbuche auseinandersetzt, indem ich mich dabei auf homogene lineare Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten und auf reelle Werte der unabhängigen Variablen beschränkte. Der Nachweis eines zu *jedem* Werte von x — nicht nur zu den Werten $x \pm nh$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — gehörigen Funktionswertes gelang da-

durch, daß im Anschluß an *Lacroix* und *Boole*, besonders aber an *Pincherle*[1]) der Begriff der „Anfangsbedingung", durch die eine „Partikularlösung" in eindeutiger Weise bestimmt wird, durch Einführung einer willkürlich vorgeschriebenen „Anfangsfunktion" in einer für lineare Differenzengleichungen geeigneten Weise definiert wurde. Die Beschränkung auf reelle Werte der unabhängigen Veränderlichen gegenüber *Pincherle*, der komplexe Variable betrachtet, ermöglichte eine genauere Fixierung der Vorstellung sowie eine weiter ins Einzelne gehende Durchführung, insbesondere den Nachweis einer für jeden (endlichen) Wert der unabhängigen Veränderlichen *endlichen*, eindeutigen und stetigen Partikularlösung sowie in den meisten Fällen die Darstellung derselben durch eine *Fourier*sche Reihe.

Nachdem mir die Arbeiten von *Nörlund* bekannt geworden waren, hätte ich ja nunmehr die analytische Darstellung der Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung durch Fakultätenreihen, die in einem gewissen Bereiche konvergieren, zum Ausgangspunkte der ganzen Theorie der linearen Differenzengleichungen machen können; ich bin aber nach reiflicher Überlegung bei dem ursprünglichen Plane in der Anlage des Buches geblieben, und zwar aus drei Gründen: erstens aus historischem Grunde, denn die Wahl jenes Ausgangspunktes hätte die ganze Entwickelungsgeschichte unserer Disziplin geradezu auf den Kopf gestellt; zweitens aus didaktischem Grunde: der Beweis für die Konvergenz der Lösungen ist ziemlich kompliziert und setzt mancherlei aus anderen, zum Teil ganz neuen Gebieten voraus, sodaß der Anfänger abgeschreckt worden wäre, während der bloße Existenzbeweis an Einfachheit und Anschaulichkeit nichts zu wünschen übrig läßt; endlich — last not least — aus dem Grunde, weil dadurch auch der Theorie der linearen Differenzengleichungen für *reelle* Veränderliche, die eine besondere Behandlung zuläßt, also namentlich der *Fourier*schen Reihe ihr Recht wird. — So bilden nunmehr die Arbeiten von *Nörlund* den Schlußstein des ganzen Werkes.

Die Beschränkung auf reelle Variable ist dann, soweit sie überhaupt in Betracht kommt — in den formalen Theorien (Kap. **2**—**6**) hat ja die unabhängige Veränderliche lediglich „literale" Bedeutung —, auch im **7.**, **8.** und **9.** Kapitel teils der Einfachheit der Darstellung wegen, teils weil sie im Sinne der ganzen Untersuchung liegt, festgehalten worden.[2]) Dagegen war für das letzte (**10.**) Kapitel, welches von der Integration der linearen Differenzengleichungen durch Reihen handelt, diese Beschränkung nicht angebracht, weil die Darstellung

1) *Pincherle* (u. *Amaldi*), **9.**

2) Dadurch ergab sich gleichzeitig ein vermittelnder Standpunkt zwischen den Forschern, die nur ganzzahlige, positive Werte der unabhängigen Veränderlichen zulassen, und denen, welche komplexe Werte der Variablen in Betracht ziehen.

dadurch an Einfachheit nicht gewinnt, an Übersichtlichkeit aber verliert, indem der Konvergenzbereich der auftretenden Reihen in unnötiger Weise beschränkt wird.

Eine weitere, ebenfalls durch die Einfachheit der Darstellung und die durchweg angestrebte Präzision der Resultate bedingte Begrenzung des Stoffes haben wir uns dadurch auferlegt, daß wir im allgemeinen nur solche lineare Differenzengleichungen betrachten, deren Koeffizienten *rationale* Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind; nur an zwei Stellen sind wir aus bestimmten Gründen von diesem Prinzip abgewichen; im **9.** Kapitel, welches den *Poincaré*schen Satz behandelt, wo diese Beschränkung unnötig ist — das ist gerade ein Vorzug der *Poincaré*schen Beweismethode —, und im letzten Abschnitt des **10.** Kapitels, wo eine Grundlage für weitere Untersuchungen geschaffen werden sollte und daher die Koeffizienten Fakultätenreihen sind.

Vorausgesetzt werden in diesem Buche die Elemente der Funktionentheorie und der algebraischen Analysis, die wichtigsten Determinantensätze, die Differential- und besonders die Integralrechnung sowie in den beiden letzten Abschnitten einige Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Fakultätenreihen; doch ist in den meisten Fällen auf die Quellen hingewiesen worden, aus denen diese Kenntnisse geschöpft werden können. — Das Literaturverzeichnis am Schlusse des Buches, bei welchem die Autoren in alphabetischer Reihenfolge und die Arbeiten eines jeden Autors chronologisch angeordnet sind, macht keinen Anspruch auf absolute Vollständigkeit und bringt in erster Reihe diejenigen Abhandlungen, die in dem Buche selber benutzt oder zitiert worden sind; doch dürfte wohl keine wichtigere Arbeit über lineare Differenzengleichungen fehlen, wenn dasselbe noch durch die bei *Andoyer* (**1.**) enthaltenen Literaturangaben ergänzt wird. — Herr *Guldberg* hat das vierte, fünfte und die drei ersten Abschnitte des sechsten Kapitels bearbeitet; alles übrige rührt von dem Unterzeichneten her; Untersuchungen, Bemerkungen und Zusätze desselben, die in diesem Buche zum ersten Male veröffentlicht werden, sind durch W. gekennzeichnet worden. Im übrigen konnten durch das Literaturverzeichnis die Zitate erheblich abgekürzt werden, indem nur auf die Nummer der Arbeit des betreffenden Autors verwiesen zu werden brauchte.

Möge unser Werk dazu beitragen, das Interesse der Mathematiker für eine in ihren Anfängen sehr alte, aber in ihren letzten Ausläufern ganz neue Disziplin wieder zu erwecken; daß sie dieses Interesse verdient, zeigt die überraschende Mannigfaltigkeit der Entwickelungsmöglichkeiten und Untersuchungsmethoden, deren Darlegung sich der Unterzeichnete ganz besonders angelegen sein ließ, sowie der Umstand, daß sie gerade mit den wichtigsten und schönsten Gebieten

der Analysis durch vielfache enge Beziehungen verbunden ist; insbesondere seien jüngere Forscher auf dieses neue Untersuchungsfeld hingewiesen, welches lange brach gelegen hat und noch reiche Früchte verheißt. Sollte das vorliegende Buch diesen Zweck erreichen, so wird das Bewußtsein, dem mathematischen Königreiche eine alte Provinz wiedergewonnen zu haben, den Verfasser für seine nicht geringe Mühe reichlich entschädigen.

Zum Schlusse ist es mir ein Bedürfnis, meinem Mitarbeiter Herrn *Guldberg* und Herrn *Nörlund* sowie auch dem *Teubner*schen Verlage meinen besten Dank für die Bereitwilligkeit auszusprechen, mit welcher sie auf meine Wünsche eingegangen sind; ferner den Herren Prof. Dr. Fürle, Oberlehrer Figur und Kandidat Stegmann, die je eine Korrektur des Buches gelesen haben.

GEORG WALLENBERG.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER TEIL.

Grundlegende Begriffe und allgemeine Theorien.

Erstes Kapitel.

Begriff der linearen Differenzengleichung und ihrer Integrat

Zweites Kapitel.

Formale Theorien. 1. Teil.

Drittes Kapitel.

Formale Theorien. 2. Teil.

Viertes Kapitel.

Gruppentheorie 1. Teil. Transformation.

Fünftes Kapitel.

Reduzibilität.

Sechstes Kapitel.

Gruppentheorie 2. Teil. Die Rationalitätsgruppe.

ZWEITER TEIL.

Integration der linearen Differenzengleichungen durch analytische Ausdrücke.

Siebentes Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Achtes Kapitel.

Differenzengleichungen mit linearen Koeffizienten. Integ derselben durch bestimmte Integrale.

Neuntes Kapitel.

Verhalten der Lösungen homogener linearer Differenzengleic im Unendlichen.

Zehntes Kapitel.

Integration der linearen Differenzengleichungen durch Re

ERSTER TEIL

GRUNDLEGENDE BEGRIFFE UND ALLGEMEINE THEORIEN

Erstes Kapitel.

Begriff der linearen Differenzengleichung und ihrer Integration.

I. Definition einer linearen Differenzengleichung n^{ter} Ordnung.[1])

Wir verstehen im folgenden unter x eine *reelle, unbeschränkt veränderliche* Größe[2]), unter y_x eine von x abhängige Größe, eine „Funktion von x". Eine Differenzengleichung ist dann eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \ldots, \Delta^n y_x) = 0;$$

darin bedeutet F eine gegebene (gewöhnlich ganze rationale) Funktion der unabhängigen Variablen x, der unbekannten Funktion y_x und der Differenzen verschiedener Ordnung von y_x:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x,$$
$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^n y_x = y_{x+n} - n y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} y_{x+n-2} - \cdots + (-1)^n y_x.\text{[3])}$$

Setzt man diese Werte für $\Delta y_x, \Delta^2 y_x, \ldots, \Delta^n y_x$ in die Gleichung (1) ein, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(2) \qquad \Phi(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}) = 0.$$

Umgekehrt läßt sich die Gleichung (2) mittels der Formeln

$$y_{x+1} = y_x + \Delta y_x,$$
$$y_{x+2} = y_x + 2\Delta y_x + \Delta^2 y_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{x+n} = y_x + n\Delta y_x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_x + \cdots + \Delta^n y_x\text{[4])}$$

1) Vgl. *Boole*, **1.**; *Markoff*, **1.**; *Seliwanoff*, **1.** u. **2.**; *Pincherle* u. *Amaldi* **9.**, Kap. X; H'.

2) Der allgemeinere Fall, daß x eine komplexe Variable mit konstantem imaginärem Bestandteil ist, läßt sich durch Parallelverschiebung der reellen Achse leicht auf den obigen zurückführen.

3) Führt man außer Δ noch das Operationssymbol $Dy_x = y_{x+1}$ ein, so ist symbolisch: $\Delta y_x = Dy_x - y_x = (D-1)y_x$, $\Delta^n y_x = (D-1)^n y_x$; darin ist $D^\nu y_x = y_{x+\nu}$ (vgl. *Lacroix*, **1.**; *Boole*, **1.**).

4) Symbolisch: $Dy_x = (1+\Delta)y_x$, $D^n y_x = (1+\Delta)^n y_x$ u. s. f.

leicht in die Form (1) überführen, so daß die Gleichungen (1) und (2) als äquivalent zu betrachten sind. Wir ziehen die Form (2) als die einfachere im allgemeinen der Form (1) vor: Φ enthält hier die unabhängige Variable x, die unbekannte Funktion y_x und ihre *„sukzessiven Werte“* $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n}$, d. h. die Werte, welche y_x für die sukzessiven, um 1 unterschiedenen Werte von x annimmt. Der Fall, daß die Werte von x sich um eine beliebige Größe h unterscheiden, daß also die sukzessiven Werte lauten: $x+h, x+2h, \ldots, x+nh$, kann leicht auf den obigen, wo die Differenz 1 ist, durch die Substitution $x = hz$, $y_{hz} = u_z$ zurückgeführt werden.

Die Gleichung (2) heißt *eine Differenzengleichung n^{ter} Ordnung*, wenn sie wirklich y_{x+n} und y_x enthält; wenn dagegen $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k-1}$ $(k<n)$ darin nicht vorkommen, so kann man sie durch die Substitution $x+k=z$ in eine Differenzengleichung $(n-k)^{ter}$ Ordnung transformieren.

Beispiel[1]: Die Gleichung

$$\Delta^3 y_x - 3\Delta y_x - 2y_x + x = 0$$

wird mittels der Formeln

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x, \quad \Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$

in die Gleichung

$$y_{x+3} - 3y_{x+2} + x = 0$$

transformiert, die weder y_x noch y_{x+1} enthält. Setzt man $x+2=z$, so erhält man die Differenzengleichung *erster* Ordnung

$$y_{z+1} - 3y_z + z - 2 = 0.$$

Enthält ferner die Gleichung (2) nur diejenigen Funktionen y_{x+i}, für welche die Zahlen i den gemeinsamen Teiler r besitzen, so ist sie eine *uneigentliche Differenzengleichung n^{ter} Ordnung*[2]; sie ist dann nämlich eigentlicheine Differenzengleichung von der Ordnung $n' = \frac{n}{r}$, bei der die Differenz der sukzessiven Werte von x gleich r ist. So ist z. B. die Gleichung

$$F(x, y_x, y_{x+3}, y_{x+6}) = 0$$

uneigentlich von der 6ten Ordnung, nämlich eigentlich von der Ordnung $\frac{6}{3} = 2$ mit der Differenz 3 und wird in der Tat durch die Substitution $x = 3z$, $y_{3z} = u_z$ in die Gleichung 2ter Ordnung

$$F(3z, u_z, u_{z+1}, u_{z+2}) = 0$$

transformiert. Ebenso ist die Gleichung

$$f(x, y_x, y_{x+n}) = 0$$

---

1) *Markoff.* 2) W.

eigentlich von der ersten Ordnung mit der Differenz n und geht durch die Substitution $x = nz$, $y_{nz} = u_z$ in

$$f(nz, u_z, u_{z+1}) = 0$$

über.

Ist in der Gleichung (2) Φ eine *lineare* Funktion von $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}$, so heißt sie eine *lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung;* diese hat also die Form:

$$p_x^{(0)} y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = p_x, \tag{3}$$

worin die $p_x^{(k)}$ und p_x Funktionen von x sind. Ist $p_x = 0$, so heißt Gleichung (3) eine *homogene* lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung; ist dagegen $p_x \neq 0$, so heißt sie eine *nichthomogene* oder *vollständige* lineare Differenzengleichung. Wir werden uns im folgenden hauptsächlich mit den homogenen linearen Differenzengleichungen beschäftigen, da die vollständigen Gleichungen, wie wir später sehen werden, sich auf sie zurückführen lassen; ferner werden wir uns hauptsächlich auf den Fall beschränken, daß die Koeffizienten $p_x^{(k)}$ *rationale* Funktionen von x sind, die dann als *ganze* rationale Funktionen oder Polynome vorausgesetzt werden können.

II. Definition der Integration einer homogenen linearen Differenzengleichung. Existenz einer Partikularlösung.[1]

Eine homogene lineare Differenzengleichung

$$p_x^{(0)} y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0 \tag{1}$$

stellt eine *Forderung* dar: es soll y_x als Funktion von x so bestimmt werden, daß sie, in die Gleichung (1) eingesetzt, diese zu einer identischen macht. Eine solche Funktion y_x heißt eine *Lösung* oder auch ein *Integral* der Gleichung (1).

A. Die homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung.

Um uns über die hier auftretenden Verhältnisse Klarheit zu verschaffen, betrachten wir zunächst die einfachste homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$y_{x+1} - y_x = 0. \tag{2}$$

Sie wird offenbar befriedigt durch

$$y_x = \omega(x),$$

worin $\omega(x)$ eine *willkürliche* periodische Funktion von der Periode 1 bedeutet. Würde man nun wie bei den Differentialgleichungen als

1) *Wallenberg,* **6.**, Nr. 2; vgl. *Lacroix,* **1.**, § 418—420; *Boole,* **1.**; für komplexe Variable *Pincherle* (u. *Amaldi*), **9.**, Kap. X. § 273—280.

„Anfangsbedingung“ $y_x = b$ für $x = 0$ [1]), d. h. $y_0 = b$ wählen, so würde sich aus Gleichung (2) ergeben:

$y_1 = y_0 = b,\ y_2 = y_1 = b,\ y_3 = y_2 = b, \ldots;\ y_{-1} = y_0 = b,\ y_{-2} = y_{-1} = b, \ldots.$ Es wäre also y_x in den Punkten $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$ bestimmt, dagegen *nicht* in den *zwischen* diesen Punkten liegenden Intervallen; in der Tat hätte die sonst willkürliche periodische Funktion $\omega(x)$ nur die Bedingung $\omega(0) = b$ zu erfüllen.

Soll daher y_x für *alle* Werte von x bestimmt sein, so müssen wir folgende Anfangsbedingung festsetzen: *„In dem Intervall $x = 0$ (inklusive) bis $x = 1$ (exklusive)*[2]) *soll $y_x = \varphi(x)$ sein, wo $\varphi(x)$ eine willkürlich vorgeschriebene eindeutige Funktion von x ist“*; in graphischer Darstellung: *„In dem Intervall $0 \leqq x < 1$ soll die Kurve $y_x = \omega(x)$ einen vorgeschriebenen Verlauf besitzen.“* Dann ist in der Tat y_x für *alle* Werte von x bestimmt; denn ist $x = n + z$, wo $0 \leqq z < 1$ und n eine ganze positive oder negative Zahl ist, so ergibt sich $y_x = y_{n+z} = y_z = \varphi(z)$.

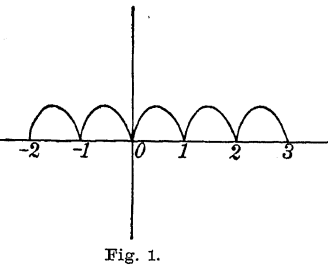


Fig. 1.

Die in dieser Weise durch ihre „Anfangsbedingung“ eindeutig festgelegte Funktion y_x nennen wir eine *Partikularlösung*[3]) der Gleichung (2). Wählt man die eindeutige Funktion $\varphi(x)$ im Intervall 0 bis 1 *inklusive* endlich, *stetig* und derart, daß $\varphi(1) = \varphi(0)$ ist (Fig. 1), so werden die im allgemeinen[4]) in den Punkten $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ auftretenden Unstetigkeiten (Fig. 2) vermieden, und es läßt sich in diesem Falle die Lösung $y_x = \omega(x)$ für *alle* Werte von x durch eine *Fourier*sche Reihe darstellen:

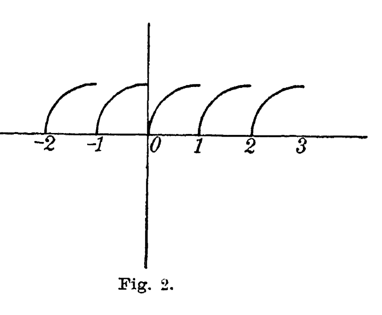


Fig. 2.

$$(3) \qquad y_x = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi x,$$

---

1) Den Anfangswert $x = a$ kann man durch die Substitution $x = a + z$ $y_{a+z} = u_z$ stets nach 0 verlegen.

2) Statt des Intervalles 0 bis 1 könnte auch das Intervall a bis $a + 1$ genommen werden.

3) Im folgenden werden wir unter einer „Partikularlösung“ aber auch oft irgend eine besondere Lösung im Gegensatze zur allgemeinen Lösung, die willkürliche periodische Funktionen enthält, verstehen.

4) Z. B. bei der periodischen Funktion $\omega(x) = x - [x]$, worin $[x]$ die größte ganze in x enthaltene Zahl bedeutet; hier sind die Kurven der Fig. 2 Strecken von der Länge $\sqrt{2}$, die mit der positiven X-Achse einen Winkel von 45^0 einschließen.

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(u)\cos 2k\pi u\,du \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

$$b_k = 2\int_0^1 \varphi(u)\sin 2k\pi u\,du \quad (k=1,2,\ldots)$$

Vir betrachten nun die allgemeinste homogene lineare Differenzen-
ung erster Ordnung

$$y_{x+1} = p_x y_x,$$

p_x eine eindeutige Funktion von x ist. Aus dieser ergibt sich
its:

$$y_{x+2} = p_{x+1} y_{x+1} = p_{x+1} p_x y_x,$$
$$y_{x+3} = p_{x+2} y_{x+2} = p_{x+2} p_{x+1} p_x y_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{x+k} = p_{x+k-1} p_{x+k-2} \cdots p_{x+1} p_x y_x;$$

rseits:

$$y_{x-1} = \frac{1}{p_{x-1}} y_x,$$
$$y_{x-2} = \frac{1}{p_{x-2} p_{x-1}} y_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{x-k} = \frac{1}{p_{x-k} p_{x-k+1} \cdots p_{x-2} p_{x-1}} y_x.$$

o wieder y_x im Intervall $x = 0$ (inklusive) bis $x = 1$ (exklusive)
einer vorgeschriebenen Funktion $\varphi(x)$, so ist y_x durch die
ungen (5) und (6) für alle positiven und negativen x bis auf
e sogleich näher zu betrachtende Werte von x eindeutig be-
t.

erschwindet y_x für $x = a$ (was, wenn $y_{a-1} \neq 0$ ist, nur ge-
n kann, wenn p_{a-1} verschwindet), ist also $y_a = 0$, so ist auch

$$y_{a+k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

denn, daß eine der Größen $p_a, p_{a+1}, \ldots, p_{a+k-1}$ unendlich
vird; und es ist auch

$$y_{a-k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

denn, daß eine der Größen $p_{a-1}, p_{a-2}, \ldots, p_{a-k}$ ebenfalls ver-
det. Wird ferner y_x für $x = b$ unendlich groß: $y_b = \infty$, so
h

$$y_{b+k} = \infty \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

es sei denn, daß eine der Größen $p_b, p_{b+1}, \ldots, p_{b+k-1}$ verschwindet; und es wird auch

$$y_{b-k} = \infty \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

es sei denn, daß eine der Größen $p_{b-1}, p_{b-2}, \ldots, p_{b-k}$ ebenfalls unendlich groß wird.

In den durch die Wendung „es sei denn, daß" gekennzeichneten Ausnahmefällen können Unbestimmtheiten von der Form $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten. Ist aber p_x unbeschränkt differenzierbar und besitzt auch die vorgeschriebene Funktion $\varphi(x)$ im Intervall 0 bis 1 Ableitungen beliebig hoher Ordnung, so können diese Unbestimmtheiten im allgemeinen (d. h. mit Ausnahme wesentlich singulärer Stellen) nach den bekannten Methoden der Differentialrechnung gehoben werden: ist nämlich die Nullstelle $a = n + \alpha$ (n positive ganze Zahl, $0 \leqq \alpha < 1$), so ist

$$y_a = y_{n+\alpha} = p_{\alpha+n-1} p_{\alpha+n-2} \cdots p_{\alpha+1} p_\alpha y_\alpha = p_{\alpha+n-1} p_{\alpha+n-2} \cdots p_{\alpha+1} p_\alpha \varphi(\alpha);$$

und ist $a = -n + \alpha$, so ist

$$y_a = y_{\alpha-n} = \frac{1}{p_{\alpha-n} p_{\alpha-n+1} \cdots p_{\alpha-2} p_{\alpha-1}} \varphi(\alpha);$$

ähnlich für die Unendlichkeitsstelle b. Es entsprechen also *allen* (positiven und negativen) Werten von x bis auf diskrete wesentlich singuläre Punkte *bestimmte* (endliche oder unendliche) Werte von y_x, die bei reellem p_x graphisch durch eine Kurve dargestellt werden können; diese Kurve ist die Repräsentantin einer eindeutig bestimmten Partikularlösung der Gleichung (4). Ist insbesondere p_x eine *rationale Funktion von x* und wählt man $\varphi(x)$ als analytische Funktion, die im Intervall 0 bis 1 keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, z. B. ebenfalls als rationale Funktion, so ist die Funktion y_x in *allen* Punkten bestimmt.

Um auch hier Sprungstellen der Lösung y_x, d. h. wesentliche Unstetigkeiten[1]) derselben an der Stelle $x = 1$ (und daher i. a. auch an den mit 1 „kongruenten" Stellen $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$) zu

1) Dabei sind unter *unwesentlichen* Unstetigkeiten solche zu verstehen, die auch bei rationalen Funktionen auftreten können, also *Pole*; insbesondere die beiden Typen $y = \pm \frac{1}{x^{2n}}$ für $x = 0$, wo sich $+\infty$ an $+\infty$ bzw. $-\infty$ an $-\infty$ anschließt, und $y = \pm \frac{1}{x^{2n+1}}$ für $x = 0$, wo sich $+\infty$ an $-\infty$ bzw. $-\infty$ an $+\infty$ anschließt. — Übrigens können auch *diese* Unstetigkeiten vermieden werden, indem man, falls p_x für $x = 0$ von der n^{ten} Ordnung unendlich groß wird: $p_x = \frac{f(x)}{x^n}$ ($f(0)$ endlich und $\neq 0$), $\varphi(x) = x^n \chi(x)$ wählt, worin $\chi(x)$ der Bedingung $\chi(1) = f(0)\,\chi(0)$ genügt, was nach obigem leicht zu erreichen ist.

vermeiden, hat man die die „Anfangsbedingung" darstellende, im Intervall 0 bis 1 (inkl.) stetige Funktion $\varphi(x)$ so zu wählen, daß $y_1 = \varphi(1)$, also, da $y_1 = p_0 y_0$ ist, daß $\varphi(1) = p_0\varphi(0)$ wird, was stets leicht erreicht werden kann, falls nicht $x = 0$ wesentlich singuläre Stelle von p_x ist: Ist $p_0 = 1$, so erreicht man $\varphi(1) = \varphi(0)$ am besten, indem man $\varphi(x)$ als periodische Funktion von x mit der Periode 1 wählt; man kann aber auch z. B. $\varphi(x) = a + bx(x-1)$ wählen. Ist dagegen $p_0 \neq 1$, so braucht man, falls $\varphi(x)$ der angegebenen Bedingung nicht genügen sollte, nur $\psi(x) = \varphi(x) + a$ zu nehmen[1]), worin a durch die Bedingung $\psi(1) = p_0\psi(0)$, d. h. $\varphi(1) + a = p_0(\varphi(0) + a)$ bestimmt wird:

$$a = \frac{\varphi(1) - p_0\varphi(0)}{p_0 - 1}.$$

Ist ferner $p_0 = 0$ oder ∞, so muß man für $\varphi(x)$ eine Funktion mit der Nullstelle bzw. dem Pol $x = 1$ wählen, falls nicht $\varphi(0) = \infty$ bzw. 0 ist, was sich ja leicht vermeiden läßt; sonst muß man erst den Wert von $[p_x\varphi(x)]_{x=0}$ bestimmen und dann nach den eben angegebenen Regeln verfahren (für $p_0 = \infty$ vergleiche auch den Schluß von Anm. 1).

Ist endlich $x = 0$ wesentlich singuläre Stelle oder Unbestimmtheitsstelle für p_x $\left(\text{z. B. für } e^{\frac{1}{x}} \text{ oder } \sin\frac{1}{x}\right)$, so sind die Punkte 1, 2, 3, ... im allgemeinen wesentlich singuläre Stellen für die Lösung y_x, in denen wesentliche Unstetigkeiten oder Unbestimmtheiten auftreten können; ist allgemeiner $x = a \geqq 0$ wesentlich singuläre Stelle von p_x, so sind die Punkte $a + k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) wesentlich singuläre Stellen für y_x, und ist $x = a < 0$ wesentlich singuläre Stelle von p_x, so sind die Punkte $a - k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) wesentlich singuläre Stellen für y_x.[2])

1) Man kann auch $\psi(x) = \varphi(x)\,(x + a)$ wählen und a dementsprechend bestimmen.

2) *Anmerkung:* Ist in der Differenzengleichung:

$$\frac{y_{x+1}}{y_x} = p_x \tag{4}$$

p_x eine ganze transzendente Funktion und besitzt diese Gleichung als Partikularlösung eine ganze transzendente Funktion von x, so kann man über die Nullstellen von p_x noch folgendes erschließen: es möge an den mit a „kongruenten" Stellen $a + n$, wo die ganze Zahl n von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, y_x bzw. von der Ordnung μ_n, p_x von der Ordnung ν_n verschwinden; dann ist

$$\nu_n = \mu_{n+1} - \mu_n.$$

Da p_x eine ganze Funktion sein soll, so ist $\nu_n \geqq 0$ (eine Nullstelle negativer Ordnung ist offenbar als Pol aufzufassen), also $\mu_n \leqq \mu_{n+1}$, d. h. μ_n wächst nicht mit abnehmendem n; und da μ_n nach vorhergehendem ebenfalls nicht negativ wird, so muß von einem gewissen, genügend kleinen n an μ_n konstant bleiben

Durch die vorhergehenden [illegible] *durch ihre Anfangsbedingung* [illegible] *eindeutig bestimmten Partikularlösung* [illegible]
η_x eine solche Partikularlösung [illegible] Gleichung (4), also

[illegible]

so ist

[illegible]

worin ω_x *eine willkürliche* [illegible] deutet; die allgemeine Lösung [illegible]

[illegible]

dies rechtfertigt die beliebige Wahl der [illegible] aus *jeder* Partikularlösung durch Multiplikation [illegible] periodischen Funktion von der Periode 1 [illegible] hervorgeht.

Beschränkt man die Veränderliche [illegible] sich von einer Größe a um eine [illegible] so kann man die allgemeine Lösung [illegible] Form darstellen; es ergibt sich [illegible]

[illegible]

schließlich

[illegible]

y_a bleibt willkürlich: [illegible]

[illegible]

die allgemeine Lösung der [illegible] keine der Größen p_0, p_1 [illegible] ∞ ist, in welchem letzteren [illegible] erhält. Für $a = 0$ ergibt sich

[illegible]

für alle positiven ganzzahligen [illegible] $p_0, p_1, p_2, \ldots$ einen bestimmten [illegible] Wert besitzen.

und folglich r_a [illegible] *ist links von a begrenzt.* [illegible] dingung erfüllt ist, [illegible] Partikularlösung besitzt [illegible] *von a*. Vgl. *Hurwitz*, 1. [illegible]

1) Vgl. *Markoff*, 1. [illegible] 2. [illegible]

B. Die Summen.

Läßt man der Variablen x ihre unbeschränkte Veränderlichkeit, so kann man folgendermaßen verfahren[1]): Aus (4) erhält man durch Logarithmieren:

$$\log y_{x+1} - \log y_x = \log p_x.\text{ }^{2})$$

Setzt man $\log y_x = u_x$, $\log p_x = q_x$, so wird diese Gleichung

$$u_{x+1} - u_x = q_x, \quad \text{d. h.} \quad \Delta u_x = q_x,$$

und daraus ergibt sich

$$u_x = \sum q_x + \omega_x,$$

worin

$$\sum q_x = q_0 + q_1 + \cdots + q_{x-1}$$

oder event. auch $\sum q_x = -\sum_{r=0}^{\infty} q_{x+r}$ ist, wenn diese unendliche Reihe konvergiert $\left(\text{z. B. für } q_x = \frac{1}{x^m},\ m > 1\right)$, während ω_x eine willkürliche periodische Funktion von x mit der Periode 1 bedeutet. Die „*Summe*" Σ stellt mithin die zur Operation Δ inverse Operation dar, symbolisch: $\Sigma q_x = \Delta^{-1} q_x$, und es soll in diesem Abschnitte das Hauptsächlichste über die Summen auseinandergesetzt werden.

Zunächst geben wir eine Zusammenstellung der wichtigsten, leicht zu verifizierenden Summenformeln mit Fortlassung der willkürlichen additiven periodischen Funktion ω_x:[3])

(a) $$\sum x(x-1)\cdots(x-(n-1)) = \frac{1}{n+1} x(x-1)\cdots(x-n),$$

oder

$$\sum \binom{x}{n} = \binom{x}{n+1}; \quad \text{für } n = 0: \quad \sum 1 = x.$$

(b) $$\sum \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-2)} \quad (n > 1).$$

(c) $$\sum a^x = \frac{a^x}{a-1}; \quad \sum e^{2k\pi i x} = x e^{2k\pi i x}.$$

(d) $$\sum \sin x = -\frac{\cos(x-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

(e) $$\sum \cos x = \frac{\sin(x-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

1) *Lagrange*, **1.**; *Lacroix*, **1.**, § 414; *Boole*, **1.**

2) Wenn die Basis nicht ausdrücklich hinzugefügt wird, ist der log naturalis gemeint; man könnte aber oben auch den log zu einer beliebigen Basis a nehmen, was unter Umständen direkt geboten erscheint, z. B. dann, wenn $p_x = a^x$ ist.

3) Vgl. z. B. *Markoff*, **1.**; *Seliwanoff*, **2.**, Nr. 25—30.

(f) $\sum (u_x + v_x) = \sum u_x + \sum v_x$.

(g) $\sum \omega_x u_x = \omega_x \sum u_x$, wenn $\omega_{x+1} = \omega_x$; z. B. $\sum \omega_x = x\omega_x$.

(h) $\sum u_x \Delta v_x = u_x v_x - \sum v_{x+1} \Delta u_x$ (Formel der partiellen Summation).

Die Summe einer ganzen rationalen Funktion n^{ten} Grades ist eine ganze rationale Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades[1]; der Beweis dafür ergibt sich leicht, wenn man die vorgelegte ganze rationale Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ durch die *Newton*sche Interpolationsformel[2] darstellt:

$$f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f(0) + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdots n}\Delta^n f(0),$$

und die Formeln (a) und (f) anwendet.

Eine Vervollständigung der obigen Tabelle kann erst im Abschnitt C erfolgen. Dagegen wollen wir hier noch einen bemerkenswerten Ausdruck für $f(x) = \Sigma\varphi(x)$, d. h. also für die Lösung der Differenzengleichung $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$, worin $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion von x ist, angeben, und zwar in Form eines bestimmten Integrales, in welchem x als Parameter auftritt; derselbe ist zuerst von *Guichard* (**1.**) aufgestellt und später in sehr eleganter Weise von *Weber* (**1.**), dem wir uns im folgenden anschließen, abgeleitet worden: Man markiere in der Ebene einer komplexen Variablen z den Punkt, der dem Werte von x (der übrigens auch komplex sein kann) entspricht, und die Punkte $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 3$, ..., die alle auf einer zur reellen Achse parallelen Geraden liegen, welche wir die Gerade X nennen wollen. Durch diese Linie X wird die z-Ebene in zwei Halbebenen geteilt, welche die positive oder negative genannt werden soll, je nachdem sie die positiv oder die negativ unendlichen imaginären Werte von z enthält. Nun kann man auf folgende Weise einen Integralausdruck für $f(x)$ bilden: man nehme einen Punkt a auf der negativen, einen Punkt b auf der positiven Seite von X an und verbinde diese beiden Punkte durch irgendeine Linie, welche die Gerade X in einem Punkte c schneidet, der zwischen x und $x-1$ liegt; dann ist

(i) $$f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(z)\,dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}.$$ [3]

---

1) Insbesondere ist $\varphi_n(x) = \Sigma x^n$ das sogenannte *Bernoulli*sche Polynom.

2) Vgl. *Seliwanoff*, **2.**, S. 6; Literatur bei *Andoyer*, **1.**

3) *Guichard* (**1.**) betrachtet auch das ebenfalls der Differenzengleichung $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$ genügende allgemeinere Integral

$$f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(z)\,\omega(x)\,dz}{\left(1 - e^{2\pi i(x-z)}\right)\omega(z)},$$

Man erhält nämlich daraus $f(x+1)$, wenn man denselben Integranden auf einem andern Wege integriert, der die Linie X in einem zwischen x und $x+1$ gelegenen Punkte c' schneidet; und für $f(x+1)-f(x)$ erhält man dann ein Integral über einen geschlossenen Weg, der von den Polen des Integranden nur den einen, x, umschließt, das also nach dem *Cauchy*schen Satze den Wert $\varphi(x)$ hat[1]), vorausgesetzt, daß man sich auf ein Gebiet der z-Ebene beschränkt, in dem $\varphi(x)$ stetig ist. — Verändert man die Grenzen a und b, ohne sie die Linie X überschreiten zu lassen, so ändert sich $f(x)$ nur um eine periodische Funktion von der Periode 1; denn da die Zusatzwege keinen Pol umschließen, so ist nach dem *Cauchy*schen Satze das Zusatzintegral für $f(x+1)-f(x)$ gleich Null.

Das für $f(x)$ gefundene Integral (i) läßt sich folgendermaßen zerlegen:

$$f(x)=\int_a^c \varphi(z)\,dz-\int_a^c \frac{\varphi(z)\,dz}{1-e^{-2\pi i(x-z)}}+\int_c^b \frac{\varphi(z)\,dz}{1-e^{2\pi i(x-z)}},$$

und $f(x)$ ändert sich nur um eine additive Konstante, wenn in dem ersten dieser drei Integrale die untere Grenze a durch einen beliebigen anderen festen Wert ersetzt wird. Dann können wir aber in den beiden anderen Integralen a nach $-i\infty$, b nach $+i\infty$ hin wachsen lassen, selbst dann noch, wenn $\varphi(z)$ mit unendlich wachsendem z wie irgendeine endliche Potenz von z unendlich groß wird. Wir erhalten dann, wenn wir in dem ersten Integral die untere Grenze, als ganz beliebig, weglassen:

$$f(x)=\int^c \varphi(z)\,dz-\int_{-i\infty}^c \frac{\varphi(z)\,dz}{1-e^{-2\pi i(x-z)}}+\int_c^{i\infty} \frac{\varphi(z)\,dz}{1-e^{2\pi i(x-z)}};$$

oder, wenn wir im zweiten und dritten Integral $z-x=-it$ bzw. $z-x=it$ substituieren:

$$f(x)=\int^c \varphi(z)\,dz-i\int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x-it)\,dt}{1-e^{2\pi t}}+i\int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it)\,dt}{1-e^{2\pi t}}.$$

Um $f(x+1)$ zu erhalten, haben wir den Punkt c durch c' zu ersetzen; wir können nun c und c' gleichweit von x entfernt, d. h. $c'-x=x-c$ annehmen; dann wird

---

worin $\omega(x)$ eine periodische Funktion von der Periode 1 ist, und zeigt, daß, wenn $\varphi(x)$ eine ganze transzendente Funktion ist, $\omega(x)$ so bestimmt werden kann, daß auch $f(x)$ eine ganze transzendente Funktion wird; vgl. *Hurwitz*, **1.**, der diesen Satz auf anderem Wege beweist, sowie *Appell*, **2.** und *Barnes*, **2.**

1) Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur in dem Integranden die Substitutionen $e^{2\pi i z}=u$, $e^{2\pi i x}=t$ auszuführen.

$$f(x+1) = \int^{c'} \varphi(z)\,dz - i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x-it)\,dt}{1-e^{2\pi t}} + i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it)\,dt}{1-e^{2\pi t}};$$

und da

$$f(x+1) + f(x) = 2f(x) + \varphi(x)$$

ist, so ergibt sich:

$$2f(x) = -\varphi(x) + \int^{c} \varphi(z)\,dz + \int^{c'} \varphi(z)\,dz + i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1-e^{2\pi t}}\,dt$$

$$+ i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1-e^{2\pi t}}\,dt.$$

Hierin kann man aber, da $t = 0$ kein Pol des Integranden ist, c und folglich auch c' mit x zusammenfallen lassen und erhält so:

$$\text{(k)} \quad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int \varphi(x)\,dx + i \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1-e^{2\pi t}}\,dt.$$

Dies ist die von *Plana* (**1.**) und *Abel* (**1.**) auf anderem Wege abgeleitete Formel, die zahlreiche Anwendungen zuläßt.[1] So ergibt z. B. die *Taylor*sche Entwicklung (falls ein solche möglich ist):

$$i[\varphi(x+it) - \varphi(x-it)] = 2 \sum_{n=1,2,3,\dots} (-1)^n \frac{\varphi^{(2n-1)}(x)\,t^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

setzt man also noch

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{B_n}{4n},\text{[2]}$$

so folgt aus der *Plana-Abel*schen Formel die *Euler*sche Summenformel[3]):

$$\text{(l)} \qquad f(x) = \int \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + \sum_{n=1,2,3,\dots} (-1)^{n-1} B_n \frac{\varphi^{(2n-1)}(x)}{(2n)!}.$$

Diese Reihe ist allerdings im allgemeinen divergent; man muß sich daher bei ihrer Benutzung auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränken und den dabei begangenen Fehler für jede Funktion $\varphi(x)$ besonders abschätzen.[4]

---

1) Die obige Ableitung rührt ebenfalls von *Weber* (**1.**) her; vgl. *Kronecker* (**1.**) und *Lindelöf* (**1.**).

2) Die Größen B_n sind die sogenannten *Bernoulli*schen Zahlen.

3) *Euler*, Comm. Acad. Petrop. **6** (1732/3), Ausg. 1738, S. 68—97; **8** (1736), Ausg. 1741, S. 3—9, 9—22. C. *Maclaurin*, A treatise of fluxions (Edingburg 1742), S. 672; vgl. *Markoff*, **1.**; *Seliwanoff*, **2.**, Nr. 36—40.

4) Das *Restglied* von *Poisson* (Paris. Mém. Bd. **6** (1826), 580), *Jacobi* (Journ. für Math. **12** (1834), 263 oder Werke, Bd. **6**, 64) und *Markoff*, **1.**, S. 121; vgl. *Seliwanoff*, **2.**, Nr. 37 u. 38.

C. Die Gammafunktion.

Nach diesem Exkurs über die Summen kehren wir zu der allgemeinen Lösung der Gleichung

(4) $$y_{x+1} = p_x y_x$$

zurück; dieselbe lautet

$$y_x = \overline{\omega}_x e^{\Sigma \log p_x} = \overline{\omega}_x e^{\log \Pi p_x} = \overline{\omega}_x \Pi p_x;$$

darin ist $\overline{\omega}_x = e^{\omega_x}$ eine willkürliche periodische Funktion von x mit der Periode 1 und

$$\Pi p_x = p_0 p_1 \cdots p_{x-1}.$$ [1])

Die durch das Symbol Σ ausgedrückte Operation soll künftighin *„Summation"*, die Operation Π dagegen in Anlehnung an einen in der Theorie der Differentialgleichungen gebräuchlichen Ausdruck *„Quadratur"* genannt werden. — Die Lösung Πp_x ist aber nur eine *formale* [2]), da dieselbe zunächst nur für positive ganzzahlige x eine Bedeutung hat und für beliebige x erst in wenigen Fällen funktionentheoretisch untersucht worden ist; zu diesen Fällen gehören hauptsächlich die, in denen p_x gleich einer Konstanten oder gleich einer rationalen Funktion von x ist. [3]) Ist $p_x = a$ (Konstante), so wird

$$y_x = \omega_x a^x.$$

Wir wenden uns nun dem Falle zu, daß p_x eine *rationale* Funktion von x ist, und behandeln zunächst den einfachsten und wichtigsten Fall, auf den der allgemeine sich zurückführen läßt, nämlich $p_x = x$; wir betrachten also die Differenzengleichung

(7) $$y_{x+1} = x y_x.$$

Um für die allgemeine Lösung derselben einen analytischen Ausdruck zu finden, machen wir folgende einfache Bemerkung: Ist

1) Eine Lösung ist auch

$$y_x = \frac{1}{\prod\limits_{r=0}^{\infty} p_{x+r}},$$

falls das unendliche Produkt konvergiert.

2) Es gibt auch für lineare Differenzengleichungen n^{ter} Ordnung formale Lösungen in Determinantenform, von denen die für Differenzengleichungen erster Ordnung geltende Lösung Πp_x ein Spezialfall ist (*Bortolotti*, **1.**).

3) Außerdem die Lösungen der Gleichungen $y_{x+1} = a^{q_x} y_x$:

$$y_x = \Pi a^{q_x} = a^{\Sigma q_x}$$

in den (in B angegebenen) Fällen, wo Σq_x bekannt ist.

$y_x^{(1)}$ eine Lösung der Gleichung $y_{x+1} = p_x^{(1)} y_x$,

$y_x^{(2)}$ eine Lösung der Gleichung $y_{x+1} = p_x^{(2)} y_x$,

. . . .

$y_x^{(n)}$ eine Lösung der Gleichung $y_{x+1} = p_x^{(n)} y_x$,

so ist

$$y_x = y_x^{(1)} y_x^{(2)} \cdots y_x^{(n)}$$

eine Lösung der Gleichung

$$y_{x+1} = p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)} y_x,$$

was sich sofort durch Multiplikation der Gleichungen

$$y_{x+1}^{(1)} = p_x^{(1)} y_x^{(1)}, \quad y_{x+1}^{(2)} = p_x^{(2)} y_x^{(2)}, \quad \ldots, \quad y_{x+1}^{(n)} = p_x^{(n)} y_x^{(n)}$$

ergibt. — Wir betrachten nun die Differenzengleichung

$$y_{x+1} = \frac{nx}{x+n} y_x, \tag{8}$$

worin n eine endliche positive ganze Zahl bedeutet. Da

$$\frac{x}{x+n} = \frac{x}{x+1} \frac{x+1}{x+2} \cdots \frac{x+n-1}{x+n}$$

ist und die Gleichung

$$y_{x+1} = \frac{x+k}{x+k+1} y_x$$

offenbar die Lösung $y_x = \frac{1}{x+k}$ besitzt, so ergibt sich aus unserer Bemerkung und den vorhergehenden Auseinandersetzungen als allgemeine Lösung der Gleichung (8):

$$y_x = \omega_x \frac{n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

oder auch

$$F_n(x) = \omega_x \frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}; \tag{9}$$

darin ist ω_x eine periodische Funktion von x mit der Periode 1. Lassen wir nun n unbegrenzt wachsen, so geht für $\lim n = \infty$ die Gleichung (8) in (7) über, deren allgemeine Lösung daher lautet:

$$F(x) = \omega_x \Gamma(x), \tag{10}$$

worin

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{11}$$

ist. Dieses unendliche Produkt, welches auch in der Form

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{(r+1)^x}{r^{x-1}(x+r)} = \frac{1}{x} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{r}\right)^x}{1+\frac{x}{r}}$$

$$\left(\Gamma(x+1) = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{r}\right)^x}{1+\frac{x}{r}}\right)^{1)}$$

geschrieben werden kann, ist zuerst von *Euler*[2]) in die Analysis eingeführt, später aber von *Gauß*[3]) wiedergefunden und genauer untersucht worden. *Gauß* gebraucht den Ausdruck

$$\Pi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (= \Gamma(x+1))$$

und beweist die Konvergenz dieses unendlichen Produktes für alle reellen Werte von x, die nicht negative ganze Zahlen sind. Die Bezeichnung $\Gamma(x)$ und der daraus entspringende Name „*Gammafunktion*" rührt von *Legendre*[4]) her. — Aus (11) ergibt sich

$$\Gamma(1) = 1,$$

und daher aus der Gleichung (7) für alle positiven ganzzahligen p:

$$\Gamma(p) = (p-1)! \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)).$$

Ferner folgt aus (11), daß $\Gamma(x)$ in 0 und den negativen ganzen Zahlen einfache Pole besitzt und das Residuum für $x = -p$:

$$\lim_{x=-p} (x+p)\,\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{(n-p)(n-p+1)\cdots(n-1)}{n^p} = \frac{(-1)^p}{p!}$$

ist.[5])

Wir geben noch eine zweite Lösung der Differenzengleichung (7) in Form eines bestimmten Integrales, welche ebenfalls von *Euler*[6]) herrührt, und benutzen zu diesem Zwecke die Methode von *Laplace*[7]): Wir setzen in Gleichung (7)

$$y_x = \int_a^b t^{x-1} f(t)\, dt,$$

worin die Grenzen a und b noch passend zu bestimmen sind; dann erhalten wir

$$\int_a^b t^x f(t)\, dt - x \int_a^b t^{x-1} f(t)\, dt = 0. \tag{12}$$

---

1) *Euler*, **1.**, S. 1; **2a.**, S. 834; **2b.** (2. Aufl.), Bd. IV, S. 105. *Gauß*, **1.**, Deutsche Ausgabe, S. 32.

2) *Euler*, **1.**, S. 2.

3) *Gauß*, **1.**, D. A., S. 37—38.

4) *Legendre*, **1.**, S. 476.

5) Vgl. *Nielsen*, **3.**, S. 13.

6) *Euler*, z. B. **2b.**, Bd. I, Sect. **1**, Kap. VII u. IX, u. Bd. IV; *Legendre*, **1.**

7) *Laplace*, **1.**; vgl. z. B. *Boole*, **1.**

Durch partielle Integration folgt aber

$$x\int_a^b t^{x-1} f(t)\,dt = \Big[t^x f(t)\Big]_a^b - \int_a^b t^x f'(t)\,dt;$$

also ergibt sich aus (12):

$$\int_a^b t^x (f(t) + f'(t))\,dt - \Big[t^x f(t)\Big]_a^b = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$f'(t) + f(t) = 0, \quad \Big[t^x f(t)\Big]_a^b = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $f(t) = \omega e^{-t}$, wo ω von t unabhängig ist, dagegen x enthalten kann; aus der zweiten Gleichung ergeben sich unter der Voraussetzung, daß x positiv ist, die Grenzen $a = 0$ und $b = \infty$. Die allgemeine Lösung von (7) lautet also:

$$y_x = \omega_x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt, \quad (x > 0),$$

wo ω_x nach früherem eine willkürliche periodische Funktion von x mit der Periode 1 ist. — Die beiden Partikularlösungen der Differenzengleichung (7):

$$\Gamma(x) \text{ (Gl. (11)) und } J(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

(das sogenannte zweite *Euler*sche Integral) können sich nach dem Vorhergehenden nur durch eine Funktion ω_x unterscheiden, die der Bedingung $\omega_{x+1} = \omega_x$ genügt; wir wollen zeigen, daß $\omega_x = 1$, d. h. für positive x genau

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \tag{13}$$

ist.[1])

---

1) *Schlömilch,* **1.**, S. 242—243; einen anderen Beweis gab *Pringsheim* (Math. Ann. **31** (1888), 459); der Beweis von *Gauß* (**1.**, D. A., S. 40) ist nicht streng; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 57. Nach den Angaben von *Pringsheim* (l. c. S. 458) und *Nielsen* (**3.**, S. 145, Anm. 1) kommt die Integralform (13) für $\Gamma(x)$ nicht früher als bei *Poisson* (Journ. de l'Éc. Polytechn., cah. **19**, 477 (1823)) vor. — Setzt man in (13) $t = -\log z$, so erhält man die *Euler*sche Integraldarstellung von $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{z}\right)^{x-1} dz \quad (x > 0).$$

Setzt man ferner in (13) $t = e^z$, so ergibt sich die Integraldarstellung:

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^z} e^{zx}\,dz,$$

welche *Gauß* (**1.**, D. A., S. 82) als die beste Definition der Gammafunktion bezeichnet; vgl. *Nielsen*, **3.**, S. 145.

Für beliebige positive t und p besteht die Ungleichung

$$e^{\frac{t}{p}} > 1 + \frac{t}{p},$$

woraus folgt:

$$e^t > \left(1 + \frac{t}{p}\right)^p, \quad e^{-t} < \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{p}\right)^p}.$$

Da ferner für positive t und reelle x die Potenz $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t}$, wenn man den *reellen* „Hauptwert" des Logarithmus nimmt, immer positiv bleibt, so ist

$$0 < J(x) < \int_0^\infty \frac{t^{x-1}\,dt}{\left(1 + \frac{t}{p}\right)^p},$$

oder, wenn man die Substitution $1 + \frac{t}{p} = \frac{1}{u}$ anwendet,

$$0 < J(x) < p^x \int_0^1 u^{p-x-1}(1-u)^{x-1}\,du.\,^{1})$$

Nimmt man nun die beliebige positive Größe $p = n + x$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so ist nach einer bekannten Integralformel[2]):

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{x-1} = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \quad (x > 0);$$

also

$$0 < J(x) < (n+x)^x \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Andererseits ist, da der Integrand in $J(x)$ positiv bleibt,

$$J(x) > \int_0^n e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Nun ist aber für $t < n$:

$$e^{-\frac{t}{n}} > 1 - \frac{t}{n}, \quad e^{-t} > \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

und daher

$$J(x) > \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt;$$

---

1) Das ist das „erste *Euler*sche Integral" (*Euler*, **2b.**, Bd. I, 213—247; Bd. IV, 78—354); diese Bezeichnungen rühren von *Legendre* (**1.**) her.

2) *Gauß*, **1.**, D. A., S. 39; vgl. z. B. *Schlömilch*, Compendium der höheren Analysis, 5. Aufl. (1881), Bd. I, 412.

durch die Substitution $1 - \frac{t}{n} = u$ wird daraus:

$$J(x) > n^x \int_0^1 u^n (1-u)^{x-1} du,$$

d. h. nach der obigen Integralformel:

$$J(x) > n^x \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Es ist also

$$\frac{J(x)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^x} < \frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} < \left(1+\frac{x}{n}\right) J(x).$$

Durch den Übergang zur Grenze für unendlich wachsende n ergibt sich aus diesen Ungleichungen

$$\Gamma(x) = J(x).$$

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (7) lautet also:

$$y_x = \omega_x \Gamma(x),$$

worin ω_x eine periodische Funktion von x mit der Periode 1 bedeutet und $\Gamma(x)$ nunmehr entweder durch den Ausdruck (11) oder (13) bestimmt ist; der erstere hat den Vorzug, für *alle* von 0 und negativen ganzen Zahlen verschiedenen x Geltung zu besitzen, während der zweite nur für positive Werte von x gilt.[1])

Bestimmt man eine Partikularlösung der Gleichung (7) in der unter **A** angegebenen Weise dadurch, daß y_x im Intervall $0 \leqq x < 1$ gleich einer vorgeschriebenen Funktion $\varphi(x)$ sein soll, so kann die periodische Funktion $\omega(x)$ bei geeigneter Wahl von $\varphi(x)$ in ihrem ganzen Verlaufe durch eine *Fourier*sche Reihe ausgedrückt werden; es ist nämlich für $0 \leqq x < 1$:

$$\omega(x)\Gamma(x) = \varphi(x), \quad \text{d. h.} \quad \omega(x) = \frac{\varphi(x)}{\Gamma(x)}.$$

---

1) Ist n eine endliche, nicht negative ganze Zahl, so gilt für $-n-1 < x < -n$ die Formel von *Cauchy* (Exercices de Math. II, 92 (1827); vgl. *Nielsen*, **3.**, § 58):

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty (e^{-t} - \varphi_n(t))\, t^{x-1}\, dt, \quad \left(\varphi_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^r}{r!}\right).$$

Ferner existiert folgende, nach *Schläfli* (Math. Ann. **3** (1871), 148) zuerst von *Weierstraß* gefundene allgemein gültige Integraldarstellung:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_W e^t\, t^{-x}\, dt;$$

darin bezeichnet W einen Integrationsweg, welcher von $-\infty$ ausgehend sich unterhalb der Achse der negativen Zahlen hinzieht, den Anfangspunkt rechtläufig umkreist und dann oberhalb derselben Achse nach $-\infty$ zurückkehrt (vgl. *Nielsen*, **3.**, § 59).

Wählt man nun $\varphi(0)$ endlich und unseren früheren Auseinandersetzungen gemäß

$$\varphi(1) = [x\,\varphi(x)]_{x=0} = 0, \quad \text{z. B.} \quad \varphi(x) = (x-1)\,\psi(x),$$

wo $\psi(0)$ und $\psi(1)$ endlich ist, so wird, da $\Gamma(0) = \infty$, $\Gamma(1) = 1$ war, $\omega(1-0) = \omega(0) = 0$ (vgl. Fig. 1, S. 6), und es ist daher $\omega(x)$ für *alle* Werte von x durch die *Fourier*sche Reihe (3) bestimmt, worin

$$a_k = 2\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\Gamma(u)} \cos 2k\pi u\,du, \quad b_k = 2\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\Gamma(u)} \sin 2k\pi u\,du$$

ist; hierbei wird der Verlauf der Gammafunktion im Intervall 0 bis 1 als bekannt vorausgesetzt.

Man kann sich die Frage vorlegen: Für welche Partikularlösungen wird die periodische Funktion $\omega(x)$ eine wirkliche Konstante, z. B. gleich 1? Für diese Lösung ist die vorgeschriebene Funktion $\varphi(x)$ selber gleich $\Gamma(x)$, so daß bereits bei der Festsetzung der Anfangsbedingung der Verlauf der Gammafunktion im Intervall 0 bis 1 als bekannt vorausgesetzt werden muß. Um nun diese Lösungen auch ohne Kenntnis dieses Verlaufes charakterisieren zu können, wollen wir noch eine zweite Art auseinandersetzen, eine solche Partikularlösung der Gleichung (7) festzulegen; dadurch wird gleichzeitig für diesen besonderen Fall eine (wie wir sehen werden[1]), praktisch anwendbare) Methode gewonnen, durch eine „Anfangsbedingung", die hier in Form einer Grenzbedingung auftritt, die willkürliche periodische Funktion $\omega(x)$ zu bestimmen. Wir suchen nämlich diejenige Partikularlösung u_x der Gleichung (7), für welche die Grenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{x+n}}{(n-1)!\,n^x} = 1 \tag{14}$$

für alle Werte von x im Intervall 0 bis 1 erfüllt ist. Nun ist aber[2])

$$\frac{u_{x+n}}{(n-1)!\,n^x} = \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)\,u_x}{(n-1)!\,n^x};$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{x+n}}{(n-1)!\,n^x} = u_x \lim_{n=\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{(n-1)!\,n^x},$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{x+n}}{(n-1)!\,n^x} = \frac{u_x}{\Gamma(x)} = 1 \;^{3)} \quad (0 \leqq x < 1).$$

Für die Partikularlösung u_x, die der Grenzbedingung (14) genügt, ist also — zunächst für $0 \leqq x < 1$, aber, da $\omega(x)$ eine periodische

---

1) Vgl. *2. Kap.*, III, zweite Anwendung. 2) Vgl. *Nielsen*, **3.**, S. 12.

3) Nimmt man allgemeiner a statt 1, so ergibt sich $u_x = a\,\Gamma(x)$.

Funktion von der Periode 1 ist, für *alle* x die willkürliche periodische Funktion $\omega(x) = 1$, d. h. $u_x = \Gamma(x)$, und wir sehen, daß in der Tat diese Grenzbedingung imstande ist, die Festlegung des Verlaufes von u_x im Intervall 0 bis 1 zu ersetzen.[2]

Wir erwähnen noch eine dritte Lösungsmethode der Differenzengleichung (7)[3]: Ist y_x eine differenzierbare Lösung derselben, so genügt $v_x = \frac{d \log y_x}{dx}$ der Differenzengleichung

$$v_{x+1} - v_x = \frac{1}{x}, \quad \left(\text{formale Lösung: } v_x = \sum \frac{1}{x} + \omega\right),$$

und diese Gleichung wird offenbar befriedigt durch

$$v_x = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right) + \omega_x, \quad \omega_{x+1} = \omega_x.$$

Für $\omega_x = -C$, worin

$$C = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772156649\ldots$$

die sogenannte *Euler*sche Konstante[4] bedeutet, ergibt sich insbesondere

$$(15) \qquad \Psi(x) = -C + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x}\right) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} \text{ [illegible]}$$

Mittels der Funktion $\Psi(x)$ und ihrer Ableitungen kann die Tabelle der unter B. angegebenen Summationen erweitert werden; es ist nämlich

$$(\mathrm{m}) \qquad \sum \frac{1}{x} = \Psi(x) + \omega;$$

und allgemein für positive ganzzahlige l

$$(\mathrm{n}) \qquad \sum \frac{1}{x^{l+1}} = \frac{(-1)^l}{l!}\,\Psi^{(l)}(x) + \omega,$$

$$\left(\Psi^{(l)}(x) = \frac{d^l \Psi(x)}{dx^l} = \frac{d^{l+1} \log \Gamma(x)}{dx^{l+1}}\right).$$

Durch die Formeln (m) und (n) ist man in den Stand gesetzt, die *Summation einer beliebigen rationalen Funktion* mittels Partial

1) *Weierstraß*, 1., S. 36; implizite bereits bei *Gauß*, 1., Art. [illegible] ([illegible]).

2) Eine dritte Art der eindeutigen Festlegung einer Partikularlösung durch ihre „Anfangsbedingungen", die aber komplexe Werte von x in Betracht zieht, findet sich bei *Scheefer*, 1., und *Mellin*, 3.

3) *Nielsen*, 3., § 1—4; vgl. *10. Kap.*, I. B, 1.

4) *Euler*, 2a., S. [illegible] (1755) u. Comment. Acad. Petrop. Bd. VII, 157 (1740); weitere Literatur siehe bei *Nielsen*, 3., § 2.

bruchzerlegung und gliedweiser Summation auszuführen.[1]) Besonders einfach gestaltet sich die Summation von

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-a-1)\cdots(x-a-p)},$$

worin $f(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades ist[2]); man braucht nur $f(x)$ nach der bereits erwähnten *Newton*schen Interpolationsformel zu entwickeln:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-1)\cdots(x-a-(n-1))}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n f(a),$$

dann jedes Glied einzeln durch den Nenner $(x-a)(x-a-1)\cdots(x-a-p)$ zu dividieren und mittels der Formeln (a) (falls $n > p$), (b), (f) und (m) zu summieren. — Die Funktionen $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$ spielen eine gewisse Rolle in der mathematischen Physik; es sind daher Tafeln für diese Funktionen berechnet worden.[3])

Der Ausdruck (15) für $\Psi(x)$ führt nun in Verbindung mit der Anfangsbedingung $\Gamma(1) = 1$ auf die neue Produktdarstellung

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}};$$

dieselbe wurde zuerst von *Schlömilch*[4]) und kurz nachher von *Newman*[5]) gefunden; aber erst *Weierstraß*[6]) hat ihre funktionentheoretische Bedeutung klar erkannt und sie zum Ausgangspunkte für seine Zerlegung ganzer transzendenter Funktionen in Primfunktionen gemacht.

Da die Gammafunktion für die Theorie der linearen Differenzengleichungen von fundamentaler Bedeutung ist, so sollen hier noch kurz ihre wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt werden[7]): Die Funktion $\Gamma(z)$ hat, wie wir bereits sahen, in 0 und den negativen ganzen Zahlen einfache Pole, ist aber sonst in der ganzen z-Ebene eine endliche, eindeutige analytische Funktion der komplexen Variablen z, welche wie die Exponentialfunktion nirgends verschwindet und den wesentlich singulären Punkt $z = \infty$ besitzt, so daß $\frac{1}{\Gamma(z)}$ eine ganze

1) *W.* 2) Vgl. *Markoff*, **1.**; **W.**

3) Für $\Psi(x+1)$ von *Gauß*, **1.**, D. A., S. 52—54 (der übrigens diese Funktion mit $\Psi(x)$ bezeichnet) und *Knar*, Grunert Archiv, **43**, 168 (1865); für $\Psi'(x+1)$ und dessen reziproken Wert von *Emde*, Elektrotechnik u. Maschinenbau, **24**, 996 (Wien 1906), der auch Kurven aller dieser Funktionen gezeichnet hat („Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" von *Jahnke* und *Emde*, Leipzig 1909, S. 30).

4) *Schlömilch*, **2.** 5) Cambridge and Dublin math. Journ. **3**, 57—60 (1848).

6) *Weierstraß*, **2.**, S. 15.

7) *Nielsen*, **3.**; *Pascal*, Repertorium der höheren Mathematik, D. A., I (Analysis), Kap. XVIII, § 54.

transzendente Funktion mit einfachen Nullstellen in 0 und den negativen ganzen Zahlen ist. — Die Funktion $\Gamma(z)$ läßt sich in die Summe zweier anderen Funktionen zerlegen:

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

worin

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

ist; $Q(z)$ ist eine ganze transzendente Funktion, während $P(z)$ einfache Pole besitzt. Für $Q(z)$ besteht die Entwickelung

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

worin

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n Q(z)}{dz_n}\right]_{z=0} = \frac{1}{n!}\int_1^\infty e^{-t} (\log t)^n \frac{dt}{t}$$

ist; für $P(z)$ gilt der Ausdruck

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} - \cdots,$$

welcher die einfachen Pole von $\Gamma(z)$ klar erkennen läßt.[1])

Sehr nützlich für die Berechnung der Gammafunktion ist die leicht zu beweisende *Euler*sche Formel

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\ ^{2)} \left(\text{für } x = \frac{1}{2}:\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$$

sowie das berühmte *Gauß*sche Multiplikationstheorem

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2} - nx}\, \Gamma(nx),\ ^{3)}$$

von dem wir im *2. Kap.*, III aus der Theorie der Differenzengleichungen heraus einen neuen Beweis geben. *Legendre*[4]) und *Hoppe*[5]) haben gezeigt, wie man mittels dieser Formeln in Verbindung mit der Gleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ die Intervalle, für welche man die Gammafunktion nur zu berechnen braucht, um ihren Gesamtverlauf zu erhalten, beträchtlich einschränken kann; *Landau*[6]) hat sogar bewiesen, daß die Gesamtlänge dieser Intervalle, deren Anzahl endlich ist, beliebig klein gemacht werden kann. — Numerische Tafeln für $\log \Gamma(x+1)$

1) Vgl. *10. Kap.*, I, B, **5.**, auch wegen der Literaturangaben.

2) *Euler*, **2**[b], IV, 105 (1794); Novi Comment. Acad. Petrop. **16**, 136 ([1771] 1772).

3) *Gauß*, **1.**, Art. 26; für $n = 2$ *Legendre*, **1.**, S. 485.

4) *Legendre*, **3.**, II, Art. 118.

5) *Hoppe*, Journ. für Math. **40**, 152—154 (1850). 6) *Landau*, **1.**

rühren her von *Legendre*[1]) und *Gauß*[2]), für $\log \frac{\Gamma(x)}{2\pi}$ von *Bessel*[3]), der auch die erste graphische Darstellung der Gammafunktion geliefert hat[4]); die in Fig. 3 wiedergegebene Darstellung ist dem bereits zitierten Buche von *Jahnke* und *Emde* entnommen[5]), in welchem man auch vierstellige Tafeln für $\Gamma(x+1)$, $\log\Gamma(x+1)$ und $\Psi(x+1)$ sowie dreistellige Tafeln für $\Psi(x+1)$ und $1 : \Psi(x+1)$ findet.[6])

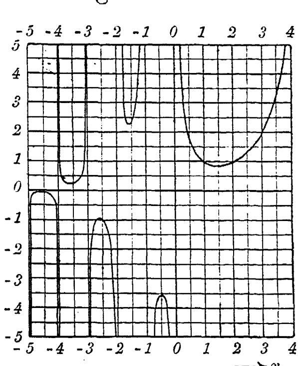


Fig. 3. Die Gammafunktion.

Hölder[7]) hat, eine Bemerkung von Weierstraß ausführend, bewiesen, daß die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann, und *Barnes*[8]) hat diesen Beweis auf die Lösungen linearer Differenzengleichungen erster Ordnung ausgedehnt, deren Koeffizienten rationale Funktionen sind. *Dadurch ist gezeigt, daß die linearen Differenzengleichungen wesentlich neue transzendente Funktionen definieren.*

Wir sind nunmehr imstande, mittels der Gammafunktion die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{x+1} = R(x) y_x,$$

worin $R(x)$ eine rationale Funktion von x ist, anzugeben: es sei

$$R(x) = a \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_q)},$$

worin auch mehrere a_i oder b_i einander gleich sein können; dann ist nach einer früheren Bemerkung[9]):

$$y_x = \omega_x a^x \frac{\Gamma(x-a_1)\Gamma(x-a_2)\ldots\Gamma(x-a_p)}{\Gamma(x-b_1)\Gamma(x-b_2)\ldots\Gamma(x-b_q)}.$$ [10])

Auch hier kann die eindeutige Festlegung einer Partikularlösung ent-

---

1) *Legendre*, **1.**, S. 508—509 (von $x = 0$ bis 0,5 mit dem Intervall 0,005 auf 7 Dezimalstellen); **2.**, I (1811), 302—306 u. II (1817), 83—95; **3.**, II (1826), 490 bis 499 (von $x = 0$ bis 1 m. d. Interv. 0,001 auf 7 bzw. 12 Stellen).

2) *Gauß*, **1.**, D. A., S. 52—54 (für $\Psi(x+1)$ $\log\Gamma(x+1)$ von $x = 0$ bis 1 m. d. Interv. 0,01 auf 20 Dezimalen).

3) Abhandlungen II (1812), 342—352 (von $x = 1$ bis 2,05 m. d. Interv. 0,01 auf 10 Stellen).

4) l. c. S. 351; weniger ausführlich *Schenkel*, Diss. Bern 1894.

5) l. c. S. 29.

6) l. c. S. 30 für $\log\Gamma(x+1)$ u. $\Psi(x+1)$ von $x = 0$ bis 1 m. d. Interv. 0,01; S. 31 für $\Psi(x+1)$ von $x = 0$ bis 10 (Intervall 1) sowie für $\Gamma(x+1)$, $\Psi'(x+1)$ u. $1 : \Psi'(x+1)$ von $x = 0$ bis 1 mit dem Intervall 0,05.

7) *Hölder*, **1.**; vgl. *Nielsen*, **3.**, Kap. VIII.

8) *Barnes*, **1.** 9) S. 16. 10) *Mellin*, **1.**

weder durch Vorschreiben des Verlaufes derselben im Intervall 0 inklusive bis 1 exklusive (vgl. Abschn. A) oder durch eine Grenzbedingung von der Form (14) bewirkt werden.[1])

Wegen der mannigfachen Reihenentwickelungen für die Funktionen $\Gamma(x)$, $\log \Gamma(x)$ und $\Psi(x)$ sowie für die Produkte von Gammafunktionen vergleiche man das *10. Kap.*, I, A u. B.

D. Homogene lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen sind.[2])

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun die homogene lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung

$$(16)\qquad P_x^{(0)}\, y_{x+n} + P_x^{(1)}\, y_{x+n-1} + \cdots + P_x^{(n)}\, y_x = 0,$$

worin $P_x^{(0)}, P_x^{(1)}, \ldots, P_x^{(n)}$, *rationale* Funktionen von x sind, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als *ganze* rationale Funktionen vorausgesetzt werden können. Auch hier definieren wir ähnlich wie in A eine Partikularlösung y_x der Gleichung (16) folgendermaßen: „*Es soll im Intervall 0 inklusive bis n exklusive $y_x = \varphi(x)$ sein, wo $\varphi(x)$ eine willkürlich vorgeschriebene eindeutige Funktion von x bedeutet.*" Wir behaupten, daß dann y_x bei geeigneter Wahl der „*Anfangsfunktion*" $\varphi(x)$ für *alle* endlichen Werte von x eindeutig bestimmt ist.

Um y_x zunächst für *positive* x zu untersuchen, machen wir, um die linke Seite der Gleichung (16) von $P_x^{(0)}$ zu befreien, falls

$$P_x^{(0)} = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_r)^{3)}$$

ist, die Substitution

$$(17)\qquad y_x = \frac{u_x}{\Gamma(x-a_1-n+1)\,\Gamma(x-a_2-n+1)\ldots\Gamma(x-a_r-n+1)};$$

dann resultiert nach Multiplikation der beiden Seiten von (16) mit $\Gamma(x-a_1)\,\Gamma(x-a_2)\ldots\Gamma(x-a_r)$ für u_x eine Gleichung von der Form

$$(18)\qquad u_{x+n} + p_x^{(1)}\, u_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)}\, u_x = 0,$$

worin $p_x^{(1)}, \ldots, p_x^{(n)}$ *ganze* rationale Funktionen von x sind.

Um nun für die zur Lösung y_x gehörige „Anfangsfunktion" $\varphi(x)$ eine geeignete Wahl zu treffen, gehen wir von der Gleichung (18) aus und wählen die zu der entsprechenden Lösung u_x gehörige An-

1) *Mellin*, **1.**

2) *Wallenberg*, **6.**; vgl. *Lacroix*, **1.**, § 418–420; *Markoff*, **1.** für komplexe Variable *Pincherle* u. *Amaldi*, **9.**, Kap. X.

3) Der Koeffizient von x^r darf gleich 1 vorausgesetzt werden; mehrere der — ev. komplexen — Größen a_i können einander gleich sein.

sfunktion $\psi(x)$ im Intervall 0 bis n (inklusive) eindeutig, endlich stetig; dann ist auch die nach (17) mit $\psi(x)$ durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \psi(x) : \prod_{k=1}^{r} \Gamma(x - a_k - n + 1)$$

undene Funktion $\varphi(x)$ in dem angegebenen Intervall eindeutig, ich und stetig, da die eindeutige analytische Funktion $1 : \Gamma(z)$ für en endlichen Wert von z unendlich groß wird. — Aus (18) ergibt nun für jeden nicht negativen Wert von x ein bestimmter end- er Wert von u_x: Es ist nämlich $u_x = \psi(x)$ für $0 \leqq x < n$, während für jeden Wert von x, der $\geqq n$ ist, d. h. für $x = m + \alpha$ $\geqq n$ die größte in x enthaltene ganze Zahl, $0 \leqq \alpha < 1$) den zu- örigen Wert von u_x sukzessive aus den Gleichungen

$$u_{n+k+\alpha} + p_{k+\alpha}^{(1)} u_{n+k+\alpha-1} + \cdots + p_{k+\alpha}^{(n)} u_{k+\alpha} = 0$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ır durch $u_\alpha = \psi(\alpha)$, $u_{\alpha+1} = \psi(\alpha+1)$, $\ldots$, $u_{\alpha+n-1} = \psi(\alpha+n-1)$ rücken kann; da die $p_x^{(i)}$ *ganze* rationale Funktionen von x sind $\psi(x)$ im Intervall 0 bis n endlich ist, so sind auch alle diese te von u_x endlich (einige ev. gleich Null).

Um die einzig möglichen Unstetigkeiten von u_x bei $x = n$ (und r auch in den „kongruenten" Punkten $x = 2n, 3n, \ldots$) zu ver- len, muß man es so einzurichten suchen, daß $u_n = \psi(n)$ wird, , da

$$\begin{aligned} u_n &= -p_0^{(1)} u_{n-1} - p_0^{(2)} u_{n-2} - \cdots - p_0^{(n)} u_0 \\ &= -[p_0^{(1)}\psi(n-1) + p_0^{(2)}\psi(n-2) + \cdots + p_0^{(n)}\psi(0)] \end{aligned}$$

$$\psi(n) = -[p_0^{(1)}\psi(n-1) + p_0^{(2)}\psi(n-2) + \cdots + p_0^{(n)}\psi(0)]$$

len, was stets leicht zu erreichen ist: man hat nur, falls $\psi(x)$ Bedingung nicht schon erfüllen sollte, statt $\psi(x)$ die Anfangs- tion $f(x) = \psi(x) - a$ zu nehmen, worin

$$a = \frac{\psi(n) + p_0^{(1)}\psi(n-1) + \cdots + p_0^{(n)}\psi(0)}{1 + p_0^{(1)} + p_0^{(2)} + \cdots + p_0^{(n)}}$$

wenn

$$1 + p_0^{(1)} + p_0^{(2)} + \cdots + p_0^{(n)} = 0$$

wählt man am besten $\psi(x)$ als periodische Funktion mit der ode 1 oder $\psi(x) = a + bx(x-1)\cdots(x-n)$.[1])

Vermöge der Beziehung (17) ist nunmehr auch die der Funk- u_x entsprechende Partikularlösung y_x der Gleichung (16) für alle tiven Werte von x (inklusive 0) eindeutig, endlich und stetig.

---

1) Vgl. auch *2. Kap.*, II, A.

Um den Verlauf von y_x auch für *negative* Werte von x zu untersuchen, machen wir, um die Gleichung (16) von $P_x^{(n)}$ zu befreien, falls (nach Division der Gleichung (16) durch einen konstanten Faktor)

$$P_x^{(n)} = \prod_{k=1}^{s}(x - b_k)$$

ist, die Substitution

$$y_x = \prod_{k=1}^{s}\Gamma(x - b_k)\cdot v_x; \tag{19}$$

dann geht die Gleichung (16) nach Division durch $P_x^{(n)}\prod_{k=1}^{s}\Gamma(x - b_k)$ über in

$$q_x^{(0)} v_{x+n} + q_x^{(1)} v_{x+n-1} + \cdots + q_x^{(n-1)} v_{x+1} + v_x = 0, \tag{20}$$

worin die $q_x^{(i)}$ ganze rationale Funktionen von x sind.

Im Intervall 0 bis n (inklusive[1]) ist die der Lösung y_x von (16) bzw. der Lösung u_x von (18) entsprechende Lösung v_x von (20) gleich $\chi(x)$, wo nach (19) und (17)

$$\chi(x) = \frac{q(x)}{\prod_{k=1}^{s}\Gamma(x - b_k)} = \frac{\psi(x)}{\prod_{k=1}^{s}\Gamma(x - a_k - n + 1)\prod_{k=1}^{s}\Gamma(x - b_k)}$$

ist, so daß auch $\chi(x)$ in dem angegebenen Intervall eindeutig, endlich und stetig ist.

Nun läßt sich wieder v_x für jeden negativen Wert von x ($x = -m + \alpha$, m positive ganze Zahl, $0 < \alpha < 1$) sukzessive aus den Gleichungen

$$q_{\alpha-k}^{(0)} v_{n+\alpha-k} + q_{\alpha-k}^{(1)} v_{n+\alpha-k-1} + \cdots + q_{\alpha-k}^{(n-1)} v_{\alpha-k+1} + v_{\alpha-k} = 0 \tag{20*}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

linear durch $v_\alpha = \chi(\alpha)$, $v_{\alpha+1} = \chi(\alpha+1)$, ..., $v_{\alpha+n-1} = \chi(\alpha+n-1)$ ausdrücken, und da $\chi(x)$ im Intervall 0 bis n eindeutig, endlich und stetig ist, so entspricht jedem (negativen) Wert von x ein *endlicher* Wert von v_x (der eventuell Null sein kann); ferner übersieht man sofort, daß v_x für negative x nirgends, auch nicht in den Punkten $-0, -n, -2n, \ldots$, unstetig wird. Dagegen kann hier y_x in den Punkten $x = b_k - m$[2] ($k = 1, 2, \ldots, s$; $m = 0, 1, 2, \ldots$) unendlich werden, ja auch unbestimmt von der Form $\infty \cdot 0$; wählt man jedoch $\psi(x)$ und daher auch $\chi(x)$ als analytische Funktion von x, die im ...

1) Da wir $\psi(n) = u_n$ gemacht hatten.

2) Nur die reellen b_k kommen für uns in Betracht und nur die Punkte $b_k - m < 0$.

Intervall 0 bis n keinen wesentlich singulären Punkt besitzt, so kann diese Unbestimmtheit stets gehoben werden. Dieser Übelstand kann aber auch dadurch vermieden werden, daß man von vornherein nicht die Lösung y_x, sondern die Funktion

$$\eta_x = \prod_{k=1}^{s} \sin 2\pi(x - b_k) \cdot y_x$$

betrachtet, welche ebenfalls eine Lösung der Gleichung (16) darstellt, da der Faktor von y_x eine periodische Funktion von x mit der Periode 1 ist (natürlich multiplizieren sich auch die Anfangsfunktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ und $\chi(x)$ mit diesem Faktor). Da die Funktion

$$\prod_{k=1}^{s} \sin 2\pi(x - b_k)\,\Gamma(x - b_k)$$

für alle endlichen Werte von x endlich bleibt, *so haben wir in* η_x *eine Partikularlösung der vorgelegten Gleichung* (16) *gewonnen, welche für alle endlichen Werte von* x *eindeutig, endlich und stetig ist.*

Wir haben gefunden, daß für eine homogene lineare Differenzengleichung, deren Koffizienten rationale Funktionen sind, stets Partikularlösungen existieren, die durch ihre Anfangsfunktion vollständig in eindeutiger Weise bestimmt sind, insofern — unter Voraussetzung der Kenntnis der Funktionen $\Gamma(z)$ und $\sin z$ — zu jedem (reellen) endlichen Wert von x der zugehörige Wert von y_x *durch eine endliche Anzahl elementarer Rechenoperationen* eindeutig bestimmt werden kann; und zwar ergibt sich aus unseren Betrachtungen, daß man durch geeignete Wahl der Anfangsfunktion stets Partikularlösungen erhält, die für alle endlichen (reellen) Werte von x eindeutig, *endlich* und stetig sind. Damit ist die Existenzfrage als erledigt anzusehen.[1]) — Eine ganz andere Frage ist die Darstellung der Lösungen einer linearen Differenzengleichung durch analytische Ausdrücke. Dieses Problem wird, soweit es bis jetzt gelöst ist, im zweiten Teile mit Berücksichtigung der neuesten, bis in das Jahr 1910 reichenden Arbeiten eine ausführliche Behandlung finden.

Zum Schluß noch ein Wort über die Berechtigung, die Wahl der Anfangsfunktion $\varphi(x)$ für eine Partikularlösung ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit in der Weise zu beschränken, wie wir es oben getan haben; diese Berechtigung erhellt aus der folgenden Bemerkung: wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, läßt sich die

1) Zunächst für den Fall, daß die unabhängige Veränderliche x *reell* ist; die Betrachtung kann aber auf *komplexe* Variable $z = x + yi$ ausgedehnt werden, indem man die Werte der Anfangsfunktion *überall* in dem durch $0 \leqq x < 1$ bestimmten Parallelstreifen der z-Ebene vorschreibt (vgl. *Pincherle* (u. *Amaldi*) **9.**, Kap. X).

allgemeine Lösung y_x der Gleichung (16) durch n *beliebige* (linear unabhängige) Partikularlösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ in folgender Form darstellen:

$$y_x = \omega_x^{(1)} y_x^{(1)} + \omega_x^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots + \omega_x^{(n)} y_x^{(n)},$$

worin die $\omega_x^{(i)}$ willkürliche periodische Funktionen von x mit der Periode 1 sind. Aus unseren Auseinandersetzungen geht noch hervor, daß die etwaigen Pole einer Lösung y_x in die periodischen Funktionen $\omega_x^{(i)}$ verlegt werden können.

Beispiel [1]):

$$y_{x+1} = \frac{1}{x} y_x;$$

es soll diejenige Partikularlösung y_x bestimmt werden, die im Intervall 0 (inklusive) bis 1 (exklusive) gleich x ist. Es wird

im Intervall 0 bis 1: $y_x = x, \quad \left(y_1 = \left[\frac{1}{x} y_x\right]_{x=0} = \left[\frac{x}{x}\right]_{x=0} = 1\right)$

„ „ 1 bis 2: $y_x = 1,$

„ „ 2 bis 3: $y_x = \frac{1}{x-1},$

„ „ 3 bis 4: $y_x = \frac{1}{(x-1)(x-2)},$

. . . .

„ „ k bis $k+1$: $y_x = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}, \quad (k=2, 3, \ldots).$

Ferner wird

im Intervall 0 bis -1: $y_x = x(x+1),$

„ „ -1 bis -2: $y_x = x(x+1)(x+2),$

. . . .

„ „ $-(k-1)$ bis $-k$: $y_x = x(x+1)\cdots(x+k), \quad (k=1, 2, 3, \ldots).$

Setzt man

$$y_k(x) = x(x+1)\cdots(x+k), \quad (k=0, 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = y',$$

so ist

$$y_k'(-k) = y_{k+1}'(-k) = (-1)^k k!;$$

daher sind in den Punkten $0, -1, -2, \ldots$ auch die Tangentenrichtungen stetig. Figur 4. gibt ein Bild der so entstehenden Kurve, die also eine bestimmte Partikularlösung der obigen Differenzengleichung darstellt.

Hier ist übrigens, wenn man die Kenntnis der Gammafunktion voraussetzt, auch eine analytische Darstellung der oben bestimmten

---

1) *Wallenberg*, **6.**, Nr. 2.

Partikularlösung durch eine *Fourier*sche Reihe möglich: Die allgemeine Lösung unserer Differenzengleichung lautet nämlich

$$y_x = \frac{\omega(x)}{\Gamma(x)};$$

die willkürliche periodische Funktion $\omega(x)$ mit der Periode 1 wird

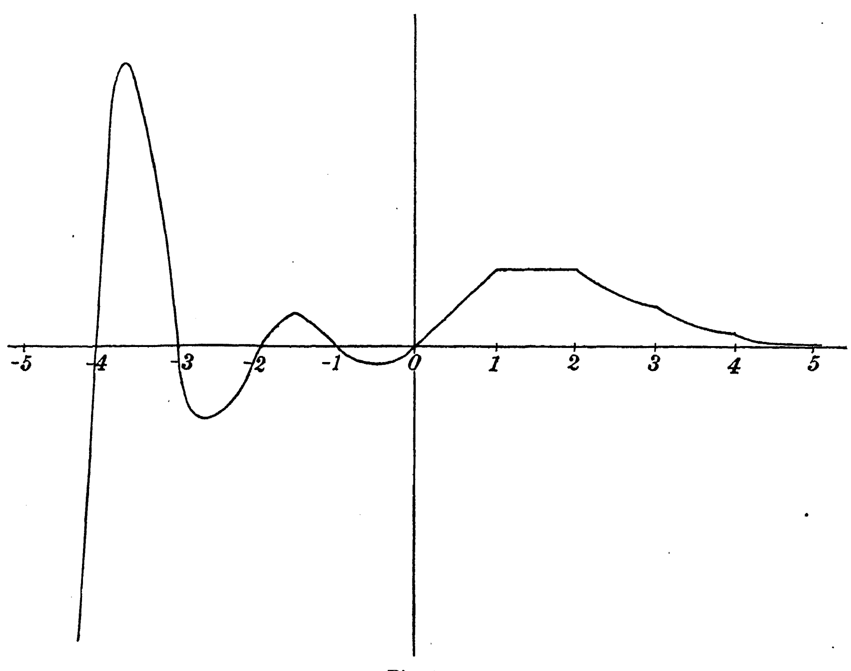


Fig. 4.

für *alle* x bestimmt durch die Bedingung $y_x = x$ für $0 \leqq x < 1$:

$$\omega(x) = x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < 1\,^{1}),$$

also

$$\omega(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi x,$$

worin

$$a_k = 2\int_1^2 \Gamma(u) \cos 2k\pi u\, du, \quad b_k = 2\int_1^2 \Gamma(u) \sin 2k\pi u\, du$$

ist. — Ähnlich zu behandeln ist die Gleichung $y_{x+1} = xy_x$ mit der Anfangsbedingung $y_x = x - 1$ für $0 \leqq x < 1$.

1) Da einerseits $\omega(1) = \omega(0) = \Gamma(1) = 1$, andererseits auch $\Gamma(2) = 1$ ist (vgl. Fig. 3), so findet bei $x = 1$ *keine* Unterbrechung der Stetigkeit statt, sodaß $\omega(x)$ wirklich für *alle* x durch die *Fourier*sche Reihe dargestellt wird.

Zweites Kapitel.

Formale Theorien. 1. Teil.

I. Allgemeine Sätze über Differenzendeterminanten.

Bevor wir in die formale Theorie der linearen Differenzengleichungen selber eintreten, d. h. in die Analogien mit den algebraischen Gleichungen und die entsprechenden weitgehenden Analogien mit den linearen Differentialgleichungen, stellen wir einige Sätze über Differenzendeterminanten auf, die auch unabhängig von der Theorie der linearen Differenzengleichungen Geltung haben.

In der Theorie der linearen Differentialgleichungen spielt eine große Rolle die sogenannte *Wronski*sche Determinante

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Eine ähnliche Rolle spielt in der Theorie der linearen Differenzengleichungen die Differenzendeterminante

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ \Delta y_x^{(1)} & \Delta y_x^{(2)} & \cdots & \Delta y_x^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_x^{(1)} & \Delta^{n-1} y_x^{(2)} & \cdots & \Delta^{n-1} y_x^{(n)} \end{vmatrix},$$

welche wir kurz die „*Determinante der n Funktionen* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$“ nennen wollen. Da

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x, \quad \Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x, \ldots,$$
$$\Delta^k y_x = y_{x+k} - k_1 y_{x+k-1} + k_2 y_{x+k-2} - \cdots + (-1)^k y_x$$

1) $y_x^{(k)}$ bedeutet *nicht* die k^{te} Ableitung von y_x, sondern die k^{te} Funktion [illegible]; ein Mißverständnis ist ausgeschlossen, da im Folgenden Ableitungen [illegible] überhaupt nicht vorkommen.

ist, worin die k_i Binomialkoeffizienten bedeuten, so folgt leicht durch bekannte Determinantenreduktionen[1]):

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & y_{x+n-1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \left| y_{x+i-1}^{(k)} \right|; \quad (k, i = 1, 2, \ldots, n)$$

diese Form wollen wir von jetzt an gewöhnlich festhalten.

Es sollen nun einige der wichtigsten Eigenschaften dieser Determinante abgeleitet werden.

A. Der Satz von Casorati[2]):

Das identische Verschwinden der Determinante $D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Abhängigkeit der von Null verschiedenen Funktionen* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$, *d. h. für das Bestehen einer Relation*

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)} = 0,$$

worin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *periodische Funktionen von der Periode 1 sind, die nicht sämtlich verschwinden.*[3])

Beweis: Ist

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)} = 0,$$

so ist auch

$$\omega_1 y_{x+1}^{(1)} + \omega_2 y_{x+1}^{(2)} + \cdots + \omega_n y_{x+1}^{(n)} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\omega_1 y_{x+n-1}^{(1)} + \omega_2 y_{x+n-1}^{(2)} + \cdots + \omega_n y_{x+n-1}^{(n)} = 0;$$

und da $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ nicht sämtlich verschwinden, so muß

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = 0$$

sein; die Bedingung ist also notwendig.

Ist umgekehrt $D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = 0$, so seien $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_n^{(n)}$ die zur letzten Zeile von D gehörigen Unterdeterminanten, von denen

1) Siehe z. B. *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten (Leipzig 1881, 5. Aufl.), S. 19 ff. (§ 3, 7).

2) *Casorati*, **1.**

3) Solche periodischen Funktionen von der Periode 1 spielen in der Theorie der Differenzengleichungen naturgemäß die Rolle von Konstanten und sollen daher von nun an zur Abkürzung ohne Index x geschrieben, als „Konstanten" ω_k bezeichnet und durch die Anführungsstriche von wirklichen Konstanten unterschieden werden.

man voraussetzen darf, daß sie nicht sämtlich verschwinden, da sonst aus $u_x^{(n)} = D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n-1)}\right) = 0$ der folgende Beweis schon die lineare Abhängigkeit der (von Null verschiedenen) Funktionen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n-1)}$ ergeben würde usf. Dann ist

$$(1)\quad \begin{cases} u_x^{(1)} y_x^{(1)} + u_x^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots + u_x^{(n)} y_x^{(n)} = 0, \\ u_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)} + u_x^{(2)} y_{x+1}^{(2)} + \cdots + u_x^{(n)} y_{x+1}^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_x^{(1)} y_{x+n-1}^{(1)} + u_x^{(2)} y_{x+n-1}^{(2)} + \cdots + u_x^{(n)} y_{x+n-1}^{(n)} = 0 \; (= D).\,^{1)} \end{cases}$$

Ferner sind $u_{x+1}^{(1)}, u_{x+1}^{(2)}, \ldots, u_{x+1}^{(n)}$ bis auf den Faktor $(-1)^{n-1}$ die zur *ersten* Zeile von D gehörigen Unterdeterminanten, also

$$(2)\quad \begin{cases} u_{x+1}^{(1)} y_x^{(1)} + u_{x+1}^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots + u_{x+1}^{(n)} y_x^{(n)} = 0 \; (= (-1)^{n-1} D), \\ u_{x+1}^{(1)} y_{x+1}^{(1)} + u_{x+1}^{(2)} y_{x+1}^{(2)} + \cdots + u_{x+1}^{(n)} y_{x+1}^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{x+1}^{(1)} y_{x+n-1}^{(1)} + u_{x+1}^{(2)} y_{x+n-1}^{(2)} + \cdots + u_{x+1}^{(n)} y_{x+n-1}^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$\frac{u_{x+1}^{(2)}}{u_{x+1}^{(1)}} = \frac{u_x^{(2)}}{u_x^{(1)}}, \quad \frac{u_{x+1}^{(3)}}{u_{x+1}^{(1)}} = \frac{u_x^{(3)}}{u_x^{(1)}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{x+1}^{(n)}}{u_{x+1}^{(1)}} = \frac{u_x^{(n)}}{u_x^{(1)}},$$

also

$$\frac{u_x^{(k)}}{u_x^{(1)}} = \gamma_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

worin die γ_k „Konstanten" sind, die nicht sämtlich verschwinden; setzt man noch $\gamma_k = \frac{\omega_k}{\omega_1}$, so ergibt sich aus der ersten Gleichung des Systems (1) die zu beweisende Relation

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)} = 0.$$

B. Sätze von Bortolotti[2]) und Wallenberg.[3])

Es ist

$$\Delta u_x v_x = u_{x+1} \Delta v_x + v_x \Delta u_x = u_x \Delta v_x + v_{x+1} \Delta u_x,$$
$$\Delta^2 u_x v_x = u_{x+2} \Delta^2 v_x + 2 \Delta u_{x+1} \Delta v_x + v_x \Delta^2 u_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^k u_x v_x = u_{x+k} \Delta^k v_x + k_1 \Delta u_{x+k-1} \Delta^{k-1} v_x + k_2 \Delta^2 u_{x+k-2} \Delta^{k-2} v_x + \cdots$$
$$\cdots + k \Delta^{k-1} u_{x+1} \Delta v_x + v_x \Delta^k u_x.$$

---

1) *Baltzer,* Determinanten, S. 13 (§ 3, 2).
2) *Bortolotti,* **2.** 3) *Wallenberg,* **6.**, Nr. 1.

Die allgemeine Formel findet man leicht durch Induktion und bestätigt ihre Richtigkeit durch den Schluß von k auf $k+1$. Mit Hilfe dieser Formel ergibt sich nach dem bekannten Satze über die Multiplikation zweier Determinanten [1])

$$\begin{vmatrix} y_x & \Delta y_x & \Delta^2 y_x & \cdots & \Delta^{n-1} y_x \\ 0 & y_{x+1} & 2\Delta y_{x+1} & \cdots & \binom{n-1}{1}\Delta^{n-2} y_{x+1} \\ 0 & 0 & y_{x+2} & \cdots & \binom{n-1}{2}\Delta^{n-3} y_{x+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{x+n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ \Delta y_x^{(1)} & \Delta y_x^{(2)} & \cdots & \Delta y_x^{(n)} \\ \Delta^2 y_x^{(1)} & \Delta^2 y_x^{(2)} & \cdots & \Delta^2 y_x^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_x^{(1)} & \Delta^{n-1} y_x^{(2)} & \cdots & \Delta^{n-1} y_x^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_x y_x^{(1)} & y_x y_x^{(2)} & \cdots & y_x y_x^{(n)} \\ \Delta y_x y_x^{(1)} & \Delta y_x y_x^{(2)} & \cdots & \Delta y_x y_x^{(n)} \\ \Delta^2 y_x y_x^{(1)} & \Delta^2 y_x y_x^{(2)} & \cdots & \Delta^2 y_x y_x^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_x y_x^{(1)} & \Delta^{n-1} y_x y_x^{(2)} & \cdots & \Delta^{n-1} y_x y_x^{(n)} \end{vmatrix},$$

d. h.

$$D\left(y_x y_x^{(1)}, y_x y_x^{(2)}, \ldots, y_x y_x^{(n)}\right) = \prod_{r=0}^{n-1} y_{x+r} \cdot D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right).$$ [2])

Setzt man hierin $y_x = \frac{1}{y_x^{(1)}}$, so erhält man

$$(3)\quad D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \prod_{r=0}^{n-1} y_{x+r}^{(1)} \cdot D\left(\Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}, \Delta \frac{y_x^{(3)}}{y_x^{(1)}}, \ldots, \Delta \frac{y_x^{(n)}}{y_x^{(1)}}\right).$$

Nun ist aber

$$\Delta \frac{y_x^{(r)}}{y_x^{(1)}} = \frac{1}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}} D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(r)}\right);$$

setzt man daher $D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(r)}\right) = u_x^{(r)}$, so wird

$$D\left(\Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}, \Delta \frac{y_x^{(3)}}{y_x^{(1)}}, \ldots, \Delta \frac{y_x^{(n)}}{y_x^{(1)}}\right) = \frac{1}{\prod_{r=0}^{n-2} y_{x+r}^{(1)} \cdot y_{x+r+1}^{(1)}} D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(3)}, \ldots, u_x^{(n)}\right),$$

also aus (3):

$$(4)\qquad D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-2} y_{x+r}^{(1)}} D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(3)}, \ldots, u_x^{(n)}\right).$$

---

1) *Baltzer,* Determinanten, S. 53 (§ 6, 4).
2) *Baltzer,* Determinanten, S. 15 (§ 3, 3).

Besondere Fälle sind:

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(3)}\right) = \frac{1}{y_{x+1}^{(1)}} D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(3)}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(n)}\right) = \frac{1}{y_{x+1}^{(1)}} D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(n)}\right);$$

$$D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(3)}, \ldots, u_x^{(n)}\right)$$
$$= \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-3} u_{x+r}^{(2)}} D\left(D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(3)}\right), D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(4)}\right), \ldots, D\left(u_x^{(2)}, u_x^{(n)}\right)\right).$$

Durch Kombination dieser Gleichungen mit (4) ergibt sich

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$$
$$= \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-3} D\left(y_{x+r}^{(1)}, y_{x+r}^{(2)}\right)} D\left(D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(3)}\right), D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(4)}\right), \ldots, D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(n)}\right)\right).$$

So fortfahrend gelangt man schließlich zu dem folgenden allgemeinen *Theorem*[1]):

Sind die Funktionen $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(\mu)};\ w_x^{(1)}, w_x^{(2)}, \ldots, w_x^{(\nu)}$ *gegeben und ist*

$$z_x^{(1)} = D\left(v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(\mu)};\ w_x^{(1)}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_x^{(\nu)} = D\left(v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(\mu)};\ w_x^{(\nu)}\right),$$

so ist

$$(5)\quad D\left(v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(\mu)};\ w_x^{(1)}, w_x^{(2)}, \ldots, w_x^{(\nu)}\right) = \frac{D\left(z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(\nu)}\right)}{\prod_{r=1}^{\nu-1} D\left(v_{x+r}^{(1)}, v_{x+r}^{(2)}, \ldots, v_{x+r}^{(\mu)}\right)}.$$

Wir ziehen noch eine andere wichtige Folgerung aus Gleichung (3): Setzt man nämlich

$$\Delta \frac{y_x^{(k)}}{y_x^{(1)}} = y_x^{(2k-1)}, \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

so erhält man in derselben Weise:

$$D\left(y_x^{(2_1)}, y_x^{(2_2)}, \ldots, y_x^{(2n-1)}\right) = \prod_{r=0}^{n-2} y_{x+r}^{(2_1)}\, D\left(\Delta \frac{y_x^{(2_2)}}{y_x^{(2_1)}}, \Delta \frac{y_x^{(2_3)}}{y_x^{(2_1)}}, \ldots, \Delta \frac{y_x^{(2_n-1)}}{y_x^{(2_1)}}\right).$$

1) *Bortolotti,* **2.**

Setzt man weiter

$$\Delta \frac{y_x^{(2_k)}}{y_x^{(2_1)}} = y_x^{(3_{k-1})}, \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$\Delta \frac{y_x^{(3_k)}}{y_x^{(3_1)}} = y_x^{(4_{k-1})}, \quad (k = 2, 3, \ldots, n-2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta \frac{y_x^{(n-2_k)}}{y_x^{(n-2_1)}} = y_x^{(n-1_{k-1})}, \quad (k = 2, 3),$$

$$\Delta \frac{y_x^{(n-1_2)}}{y_x^{(n-1_1)}} = y_x^{(n_1)},$$

so erhält man ähnliche Gleichungen, aus denen sich folgende wichtige Formel ergibt[1]):

$$(6) \qquad D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1} y_{x+r}^{(1)} \prod_{r=0}^{n-2} y_{x+r}^{(2_1)} \prod_{r=0}^{n-3} y_{x+r}^{(3_1)} \cdots \prod_{r=0}^{1} y_{x+r}^{(n-1_1)} \cdot y_x^{(n_1)},$$

von der wir später (3. Kap., I, Gl. (6)) noch eine Anwendung machen werden.

C. Adjungierte Funktionensysteme.

In der Theorie der Determinanten pflegt man ein Element a_{i_k} einer Determinante $|a_{i_k}|$ und die zugehörige Unterdeterminante α_{i_k} „adjungiert" oder α_{i_k} die „Adjunkte" zu a_{i_k} zu nennen.[2]) Ist nun ein System von linear unabhängigen Funktionen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ gegeben, so werden wir in der von Null verschiedenen Determinante dieser Funktionen

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & y_{x+n-1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

als „Adjungierte" $z_x^{(ik)}$ zu $y_{x+i-1}^{(k)}$ nicht die zu $y_{x+i-1}^{(k)}$ gehörige Unterdeterminante selber, sondern diese, dividiert durch D, bezeichnen, also

$$z_x^{(ik)} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_{x+i-1}^{(k)}}.$$

1) *Wallenberg,* **6**, Nr. 1.

2) *Cauchy,* Journ. de l'Éc. Polytechn. **17**, 64 (1815); vgl. *Baltzer,* Determ., S. 10 (§ 2, 5).

In der Theorie der Differenzengleichungen spielen eine wich[illegible] Rolle insbesondere die Adjungierten der letzten Zeile [illegible] $k = 1, 2, \ldots$ [illegible] die wir daher kurz die Adjungierten von y [illegible] nennen und ein[illegible] mit $z_x^{(k)}$ bezeichnen wollen.[1] Es ist also

$$(7)\quad z_x^{(k)} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_{x+n-1}^{(k)}} \quad (-1) \ldots \frac{D(y_x^{(1)}, y \ldots [illegible])}{D(y_x, y^{(2)}, \ldots, y_x [illegible])}$$

Wir stellen nun einige Beziehungen auf, welche zwischen ein[illegible] Funktionensystem $y_x^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und dem adjungierten System [illegible] bestehen und welche uns später von Nutzen sein werden. Zunä[illegible] ergibt sich aus elementaren Determinantensätzen unmittelbar

$$(8)\quad z_x^{(1)} y_{x+k}^{(1)} + z_x^{(2)} y_{x+k}^{(2)} + \cdots + z_x [illegible] y [illegible] = \begin{cases} 0, \text{ wenn } k [illegible] n - 1, \\ 1, \text{ wenn } k [illegible] n - 1. \end{cases}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

Wendet man auf die zweite dieser Gleichungen die Operation

$$D^{-1} u_x [illegible] u [illegible]$$

auf die dritte die Operation D^{-2}, …, auf die n^{te} die Operat[illegible] $D^{-(n-1)}$ an, so erhält man

$$(9)\quad y_x^{(1)} z_{x-k}^{(1)} + y_x^{(2)} z_{x-k}^{(2)} [illegible] y_x [illegible] = \begin{cases} 0, \text{ wenn } k [illegible] n - 1, \\ 1, \text{ wenn } k [illegible] n - 1. \end{cases}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

Daraus folgt, wenn

[illegible]

$$(10)\quad D_{-1}(z_x^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z [illegible]) [illegible]$$

gesetzt wird, daß auch $D_{-1}($[illegible]$)$ [illegible] von Null verschied[illegible] ist, da in der letzten der Gleichungen [illegible] 1 [illegible] und es [illegible] gibt sich

$$(11)\quad y_x^{(k)} = \frac{1}{D_{-1}} \frac{\partial D_{-1}}{\partial z_{x-n+1}^{(k)}} \quad [illegible] 1 [illegible] \frac{D}{D} [illegible]$$

[1] Die eigentlichen Adjungierten [illegible] Definition die durch D dividierten [illegible] aber, wie der Anblick der Determinante D [illegible]

$$z_x^{(k)} [illegible] 1 [illegible] \frac{D}{D} [illegible]$$

Die beiden adjungierten Funktionensysteme

$$y_x^{(k)} \text{ und } z_x^{(k)} \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

zeigen also ein vollkommen reziprokes Verhalten. Aus den Gleichungen (8) folgt allgemeiner durch sukzessive Anwendung der Operation $Du_x = u_{x+1}$ und der inversen Operation $D^{-1}u_x = u_{x-1}$, wenn man

$$\sum_{r=1}^{n} y_{x+\alpha}^{(r)} z_{x+\beta}^{(r)} = s_{\alpha\beta}$$

setzt:

$$(12) \qquad \begin{cases} s_{\alpha\beta} = 0, \text{ wenn } 0 \leqq \alpha - \beta < n-1, \\ s_{\alpha\beta} = 1, \text{ wenn } \alpha - \beta = n-1. \end{cases}$$

Mit Berücksichtigung dieser Relationen erhält man durch Multiplikation nach Zeilen[1])

$$\begin{vmatrix} y_x^{(1)} & \cdots y_x^{(k)} & y_x^{(k+1)} & \cdots y_x^{(n)} \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots\cdot \\ y_{x+k-1}^{(1)} & \cdots y_{x+k-1}^{(k)} & y_{x+k-1}^{(k+1)} & \cdots y_{x+k-1}^{(n)} \\ y_{x+k}^{(1)} & \cdots y_{x+k}^{(k)} & y_{x+k}^{(k+1)} & \cdots y_{x+k}^{(n)} \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots\cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & \cdots y_{x+n-1}^{(k)} & y_{x+n-1}^{(k+1)} & \cdots y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots\cdot \\ 0 & \cdots 1 & 0 & \cdots 0 \\ z_x^{(1)} & \cdots z_x^{(k)} & z_x^{(k+1)} & \cdots z_x^{(n)} \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots\cdot \\ z_{x-n+k+1}^{(1)} & \cdots z_{x-n+k+1}^{(k)} & z_{x-n+k+1}^{(k+1)} & \cdots z_{x-n+k+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & \cdots y_x^{(k)} & 0 \cdots 0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ y_{x+k-1}^{(1)} & \cdots y_{x+k-1}^{(k)} & 0 \cdots 0 \\ y_{x+k}^{(1)} & \cdots y_{x+k}^{(k)} & 0 \cdots 1 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & \cdots y_{x+n-1}^{(k)} & 1 \cdots 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$(13) \qquad D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) \cdot D_{-1}\left(z_x^{(k+1)}, z_x^{(k+2)}, \ldots, z_x^{(n)}\right)$$
$$= (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} \cdot D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(k)}\right) \text{ [2]}).$$

Insbesondere folgt für $k = 0$ die wichtige Relation

$$(14) \quad D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) \cdot D_{-1}\left(z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ [1]}),$$

---

1) *Baltzer*, Determinanten, S. 54 (§ 6, 4).
2) *Bortolotti*, **2.**, **3.**

welche die Reziprozität der beiden adjungierten Funktionensyst[illegible] $y_x^{(k)}$ und $z_x^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) in ein helles Licht setzt.

Beispiel:

$$y_x^{(1)} = 1,\ y_x^{(2)} = x,\ y_x^{(3)} = [illegible]:$$

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(3)}\right) = [illegible]$$

$$z_x^{(1)} = [illegible]$$

$$z_x^{(3)} = [illegible] 1;$$

$$D_{-1}\left(z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, z_x^{(3)}\right) = [illegible]$$

also

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(3)}\right) \cdot D_{-1}[illegible] = 1$$

II. Fundamentalsysteme.

A. Definition eines Fundamentalsystems von Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung.

Unter einem Fundamentalsystem von Lösungen oder Integralen einer homogenen linearen Differenzengleichung

(1) $P(y_x) = y_{x+n} + p[illegible]$

versteht man n linear unabhängige Partikularlösungen [illegible]

1) Das Zeichen [illegible] bedeutet [illegible] schieden von".

d. h. solche Lösungen, zwischen denen keine homogene lineare Relation

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)} = 0$$

besteht, worin die ω_i „Konstanten", d. h. periodische Funktionen von der Periode 1 sind, die nicht sämtlich verschwinden.

Für den Fall, daß die Koeffizienten $p_x^{(k)}$ rationale Funktionen von x sind, die dann nach den Ausführungen im 1. Kap., II, D als *ganze* Funktionen vorausgesetzt werden können, haben wir die Existenz *einer* Partikularlösung nachgewiesen, und wir werden sofort sehen, wie wir durch passende Wahl der Anfangsbedingungen stets ein solches Fundamentalsystem herstellen können. Aus dem Satze von *Casorati* (2. Kap., I, A) folgt, daß die Determinante der Lösungen eines Fundamentalsystems

$$(2)\qquad D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & y_{x+n-1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

und *nur* eines solchen nicht identisch verschwindet, *so daß auch das Nichtverschwinden dieser Determinante als Definition des Fundamentalsystemes gelten kann.* Bestimmen wir nun n Partikularlösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ derart, daß

$$\begin{array}{l} y_0^{(1)} = 1,\ y_1^{(1)} = 0,\ y_2^{(1)} = 0,\ \ldots,\ y_{n-1}^{(1)} = 0, \\ y_0^{(2)} = 0,\ y_1^{(2)} = 1,\ y_2^{(2)} = 0,\ \ldots,\ y_{n-1}^{(2)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_0^{(n)} = 0,\ y_1^{(n)} = 0,\ y_2^{(n)} = 0,\ \ldots,\ y_{n-1}^{(n)} = 1 \end{array}$$

ist, so wird

$$D\left(y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots, y_0^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

also verschwindet die Determinante (2) sicher nicht identisch, d. h. die so gewählten Partikularlösungen bilden ein Fundamentalsystem.[1])

Man erreicht dies am besten, indem man $y_x^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ nach den im 1. Kap., II, D auseinandergesetzten Prinzipien auf folgende

1) *Markoff*, 1; *Pincherle* (u. *Amaldi*), 9.

Weise bestimmt[1]: Es soll im Intervall $x = 0$ inkl. bis $x = n$

$$y_x^{(k+1)} = \frac{f(x)}{x-k}(\alpha_k x + \beta_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

sein, worin

$$f(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)$$

ist, während α_k und β_k durch die Gleichungen

$$y_k^{(k+1)} = f'(k)(\alpha_k k + \beta_k) = 1,$$

$$\frac{f(n)}{n-k}(\alpha_k n + \beta_k) = y_n^{(k+1)} = p_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

bestimmt werden (die zweite Gleichung bewirkt die Stetigkeit der Partikularlösung $y_x^{(k)}$ im Punkte $x = n$ und daher in allen Punkten); aus denselben ergibt sich

$$\alpha_k = \frac{p_n^{(k)}}{f(n)} - \frac{1}{(n-k)f'(k)}, \quad \beta_k = \frac{n}{(n-k)f'(k)} - \frac{k\,p_n^{(k)}}{f(n)},$$

und diese Bestimmung ist stets möglich, da $f(n) = n!$, $f'(k)$ und $n-k$ von Null verschieden sind.

Ist $y_x^{(1)}$ eine Lösung der Gleichung (1), so ist auch $\omega_1 y_x^{(1)}$, wo ω_1 eine „Konstante" bedeutet, eine Lösung; denn es ist

$$P(\omega_1 y_x^{(1)}) = \omega_1 P(y_x^{(1)}) = 0.$$

Sind ferner $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ zwei Lösungen der Gleichung (1), so ist auch $y_x^{(1)} + y_x^{(2)}$ eine Lösung; denn es ist

$$P(y_x^{(1)} + y_x^{(2)}) = P(y_x^{(1)}) + P(y_x^{(2)}) = 0.$$

Daraus folgt, daß, wenn $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ Lösungen der Gleichung (1) sind, auch

(3) $$y_x = \omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)}$$

eine Lösung der Gleichung (1) ist, worin die ω willkürliche periodische Funktionen von der Periode 1 sind. In der Tat ist

$$P(\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)}) = \omega_1 P(y_x^{(1)}) + \omega_2 P(y_x^{(2)}) + \cdots + \omega_n P(y_x^{(n)}) = 0.$$

Ist umgekehrt η_x eine beliebige Lösung der Gleichung (1), so ist, wenn die Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem bilden,

(4) $$\eta_x = \omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)}$$

1) *Wallenberg*, 6, Nr. 2

Denn aus dem Bestehen der Gleichungen

$$\begin{cases} p_x^{(0)}\eta_x + p_x^{(1)}\eta_{x+1} + \cdots + \eta_{x+n} = 0, \\ p_x^{(0)}y_x^{(k)} + p_x^{(1)}y_{x+1}^{(k)} + \cdots + y_{x+n}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

folgt, da die Größen $p_x^{(0)}, p_x^{(1)}, \ldots, 1$ sicher nicht alle gleich Null sind, daß die Determinante

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \eta_x & \eta_{x+4} & \cdots & \eta_{x+n} \\ y_x^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+n}^{(1)} \\ . & . & \cdots & . \\ y_x^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & \cdots & y_{x+n}^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

sein muß, während nach der Voraussetzung ihre Unterdeterminante

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(1)} \\ y_x^{(2)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(2)} \\ . & . & \cdots & . \\ y_x^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Daraus ergibt sich aber nach dem Satze von *Casorati* das Bestehen der Relation (4).

Ist im Intervall 0 (inkl.) bis n (exkl.)

$$\eta_x = \varphi(x), \; y_x^{(1)} = \varphi_1(x), \; \ldots, \; y_x^{(n)} = \varphi_n(x),$$

so lassen sich durch diese Anfangsbedingungen die periodischen Funktionen ω_k für $0 < x < 1$ aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \omega_1\varphi_1(x) + \omega_2\varphi_2(x) + \cdots + \omega_n\varphi_n(x) = \varphi(x) \\ \omega_1\varphi_1(x+1) + \omega_2\varphi_2(x+1) + \cdots + \omega_n\varphi_n(x+1) = \varphi(x+1), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_1\varphi_1(x+n-1) + \omega_2\varphi_2(x+n-1) + \cdots + \omega_n\varphi_n(x+n-1) = \varphi(x+n-1) \end{cases}$$

wegen (6) berechnen und sind daher als periodische Funktionen von der Periode 1 für alle Werte von x bestimmt.[1])

Die Bedeutung des Fundamentalsystems liegt darin, daß *jede* Lösung der Gleichung (1) sich durch die Elemente desselben linear ausdrücken läßt, so daß in dem Ausdruck

$$(3) \qquad y_x = \omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)},$$

falls man den „Konstanten" ω_k ihre volle Willkürlichkeit läßt, *sämt-*

1) W.

liche Lösungen der Gleichung (1) enthalten sind; der Ausdruck (3) heißt daher die *allgemeine Lösung* der Gleichung (1); z. B. ist $\omega_1 y_x^{(1)}$ die allgemeine Lösung einer Differenzengleichung erster Ordnung.

B. Beziehungen zwischen zwei Fundamentalsystemen.

Sind $u_x^{(k)}$ und $v_x^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ zwei Fundamentalsysteme von Lösungen der Gleichung (1), so ist nach dem eben Gesagten einerseits

$$v_x^{(k)} = \alpha_{k_1} u_x^{(1)} + \alpha_{k_2} u_x^{(2)} + \cdots + \alpha_{k_n} u_x^{(n)}, \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

andererseits

$$u_x^{(k)} = \beta_{k_1} v_x^{(1)} + \beta_{k_2} v_x^{(2)} + \cdots + \beta_{k_n} v_x^{(n)}, \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

worin die α_{k_i} und β_{k_i} „Konstanten" bedeuten. Daraus folgt, daß die Determinanten $|\alpha_{k_i}|$ und $|\beta_{k_i}|$ $(k=1,2,\ldots,n)$ von Null verschieden sind.

Ist umgekehrt $u_x^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ein Fundamentalsystem und $|\alpha_{k_i}| \neq 0$, so ist auch $v_x^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ ein Fundamentalsystem.

Es besteht nämlich der allgemeinere Satz: *Ist* $u_x^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *ein Fundamentalsystem und sind* $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(m)}$ $(m \leqq n)$ *lineare homogene Funktionen mit „konstanten" Koeffizienten von irgendwelchen* m *Elementen* $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(m)}$ *derselben, nämlich*

$$v_x^{(i)} = \alpha_{i_1} u_x^{(1)} + \alpha_{i_2} u_x^{(2)} + \cdots + \alpha_{i_m} u_x^{(m)} \quad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

mit der Bedingung $|\alpha_{i_r}| \neq 0$ $(i, r = 1, 2, \ldots, m)$, *so bilden auch die Lösungen* $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(m)}, u_x^{(m+1)}, \ldots, u_x^{(n)}$ *ein Fundamentalsystem.*[1])

Bestünde nämlich eine Gleichung von der Form

$$\omega_1 v_x^{(1)} + \omega_2 v_x^{(2)} + \cdots + \omega_m v_x^{(m)} + \omega_{m+1} u_x^{(m+1)} + \cdots + \omega_n u_x^{(n)} = 0,$$

worin die $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ „Konstanten" bedeuten, die nicht sämtlich gleich Null sind, so würde aus dieser Gleichung, wenn man für die $v_x^{(1)}, \ldots, v_x^{(m)}$ ihre Ausdrücke aus den Gleichungen (7) einsetzt, eine homogene lineare Beziehung zwischen den Elementen $u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}$ des gegebenen Fundamentalsystems folgen; es müßten daher alle Koeffizienten dieser Beziehung verschwinden, also

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \alpha_{i_r} = 0 \quad (r=1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

1) Vgl. *L. Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Teubner, Leipzig 1895), 1. Bd., S. 32ff.

und außerdem $\omega_{m+1} = 0, \ldots, \omega_n = 0$ sein; die Gleichungen (8) könnten aber nur dann durch nicht verschwindende Werte der $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ befriedigt werden, wenn gegen die Voraussetzung

$$|\alpha_{i_r}| = 0 \quad (i, r = 1, 2, \ldots, m)$$

wäre. — Die Bedingung, daß diese Determinante nicht verschwindet, ist übrigens gleichbedeutend damit, daß zwischen den $v_x^{(1)}, \ldots, v_x^{(m)}$ keine homogene lineare Beziehung mit „konstanten" Koeffizienten stattfindet.

III. Lineare Differenzengleichung mit gegebenem Fundamentalsystem; Darstellung ihrer Koeffizienten durch die Fundamentallösungen. [1])

Die homogene lineare Differenzengleichung

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(0)} y_x = 0 \quad \left(p_x^{(0)} \neq 0\right)$$

möge die Fundamentallösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ besitzen, so daß die Determinante

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) \equiv \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(1)} \\ y_x^{(2)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_x^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Dann ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$p_x^{(0)} y_x^{(i)} + p_x^{(1)} y_{x+1}^{(i)} + \cdots + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1}^{(i)} = - y_{x+n}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

für die Koeffizienten $p_x^{(0)}, p_x^{(1)}, \ldots, p_x^{(n-1)}$ folgende Ausdrücke:

$$(2) \qquad p_x^{(k)} = \frac{D_k\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

worin D_k aus D dadurch hervorgeht, daß in D die $k+1^{\text{te}}$ Kolonne $y_{x+k}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch $-y_{x+n}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzt wird.

Wählt man ein anderes Fundamentalsystem $u_x^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$u_x^{(k)} = \alpha_{k_1} y_x^{(1)} + \alpha_{k_2} y_x^{(2)} + \cdots + \alpha_{k_n} y_x^{(n)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die α_{ki} „Konstanten" bedeuten, so daß auch

$$u_{x+r}^{(k)} = \alpha_{k_1} y_{x+r}^{(1)} + \alpha_{k_2} y_{x+r}^{(2)} + \cdots + \alpha_{kn} y_{x+r}^{(n)} \quad (k, r = 1, 2, \ldots, n)$$

1) *Bortolotti,* **2.**; *Heymann,* **1.** u. **2.**; *Wallenberg,* **3.** u. **6.**

wird, und $|\alpha_{ki}| \neq 0$ ist. Daher ist nach einem bekannten Determinantensatze[1])

$$D\left(u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(n)}\right) = |\alpha_{ki}|\, D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right),$$
$$D_k\left(u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(n)}\right) = |\alpha_{ki}|\, D_k\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right);$$

und folglich

$$\frac{D_k\left(u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}\right)}{D\left(u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}\right)} = \frac{D_k\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

d. h. die Koeffizienten $p_x^{(0)}, p_x^{(1)}, \ldots p_x^{(n-1)}$ sind von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.

Aus (2) ergibt sich insbesondere für $k = 0$:

$$D_x p_x^{(0)} = \begin{vmatrix} -y_{x+n}^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(1)} \\ -y_{x+n}^{(2)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -y_{x+n}^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix},$$

worin $D_x \equiv D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$ gesetzt ist, oder

$$D_x p_x^{(0)} = (-1)^n D_{x+1};$$

d. h. *die Determinante* $D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$ *genügt als Funktion von* x *der homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung*

(3) $$D_{x+1} = (-1)^n p_x^{(0)} D_x,\text{[2])}$$

aus welcher formal

(4) $$D_x = \omega\,(-1)^{nx} \prod p_x^{(0)}\text{[3])}$$

folgt; die „Konstante" ω $(\neq 0)$ hängt von der Wahl des Fundamentalsystems $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ab. Ist $p_x^{(0)}$ eine rationale Funktion von x:

$$p_x^{(0)} = a\,\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}}{(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_q)^{\beta_q}},$$

so ist nach dem 1. Kap., II, C:

$$D_x = \omega_x (-1)^{nx} a^x \frac{\Gamma^{\alpha_1}(x-a_1)\,\Gamma^{\alpha_2}(x-a_2)\ldots\Gamma^{\alpha_p}(x-a_p)}{\Gamma^{\beta_1}(x-b_1)\,\Gamma^{\beta_2}(x-b_2)\ldots\Gamma^{\beta_q}(x-b_q)};$$

---

1) *Baltzer*, Determ., S. 49 (§ 6, 1).

2) *Heymann*, **1.** u. **2.**, S. 115; wir nennen die Gl. (3) bzw. (4) den „*Heymannschen Satz*".

3) 1. Kap. II, A.

daraus folgt, daß D_x (abgesehen von dem Faktor ω_x) nur an den „singulären" Stellen $x = b_i - k$ $(i = 1, 2, \ldots q;\ k = 0, 1, 2 \ldots)$ verschwindet.[1])

Als *erste* Anwendung des *Heymann*schen Satzes zeigen wir, wie man die zweite Fundamentallösung $y_x^{(2)}$ einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0$$

durch die erste $y_x^{(1)}$ ausdrücken kann: Aus

$$D_x = y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} = \omega \prod r_x \quad \text{(s. Gl. (41))}$$

folgt nach Division durch $y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}$:

$$\Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}} = \omega \frac{\prod r_x}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}},$$

also

$$y_x^{(2)} = \omega y_x^{(1)} \sum \frac{\prod r_x}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}}.\ ^{2)}$$

Als *zweite* Anwendung der Relation (3) bzw. (41) geben wir eine neue Ableitung des *Gauß*schen Multiplikationstheorems für die Gammafunktion:[3])

Wir gehen von der Differenzengleichung

$$y_{x+n} - \frac{x}{n} y_x = 0$$

aus: dieselbe geht durch die Substitution $x = nz$, $y_{nz} = u_z$ über in

$$u_{z+1} - z u_z = 0;$$

ihre Lösungen haben daher die Gestalt

$$y_x = \omega_x \Gamma\left(\frac{x}{n}\right),\ ^{4)}$$

worin ω_x eine periodische Funktion von $z = \frac{x}{n}$ mit der Periode 1, also eine periodische Funktion von x mit der Periode n ist. Wir erhalten so n Fundamentallösungen

$$y_x^{(i)} = \epsilon_x^{(i)} \Gamma\left(\frac{x}{n}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die $\epsilon_x^{(i)}$ periodische Funktionen von der Periode n bedeuten,

1) W. 2) *Wallenberg*, **2.**, S. 56.

3) *Gauß*, **1.**, Art. 26, *Heymann*, **2.**, S. 115 ff.! *Wallenberg*, **6.**, Nr. 3; die sonstige Literatur siehe bei *Nielsen*, **3.**, S. 18.

4) 1. Kap., II, C.

zwischen denen keine lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten besteht (z. B. $\alpha_x^{(i)} = \varepsilon_i^x$, worin die ε_i die Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^n = 1$ sind). Dann ist

$$D_x = \left| y_{x+k}^{(i)} \right| = \left| \alpha_{x+k}^{(i)} \right| \Gamma\left(\frac{x+k}{n}\right) = \left| \alpha_{x+k}^{(i)} \right| \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{x+k}{n}\right) \equiv \alpha_x \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{x+k}{n}\right);$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

andrerseits ist nach dem *Heymann*schen Satze

$$D_{x+1} = (-1)^{n-1} \frac{x}{n} D_x,$$

also

$$D_x = \beta_x (-1)^{(n-1)x} n^{-x} \Gamma(x),$$

worin β_x eine periodische Funktion von der Periode 1 ist. Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für D_x folgt, wenn noch $x = nz$ gesetzt wird, mit Rücksicht darauf, daß $(-1)^{(n-1)nz}$ sowie α_{nz} und β_{nz} periodische Funktionen von z mit der Periode 1 sind:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \gamma_z n^{-nz} \Gamma(nz),$$

worin γ_x eine periodische Funktion von der Periode 1 ist. Man kann nun *nicht* wie bei Differentialgleichungen die „Konstante" γ_z dadurch bestimmen, daß man in der obigen Relation für z irgend einen festen Wert, z. B. $\frac{1}{n}$ einsetzt, weil dadurch nur $\gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ bestimmt wird; wir müssen vielmehr die Auseinandersetzungen des ersten Kapitels (II, C) zu Rate ziehen.

Wir setzen, um γ_z zu bestimmen, $z + \mu$ an Stelle von z, worin μ eine ganze Zahl ist, und dividieren die zuletzt gefundene Relation beiderseits durch $n^{-1}(n\mu)!\mu^{nz-1}$; dann erhalten wir, da $\gamma_{z+\mu} = \gamma_z$ ist:

$$\frac{n}{(\mu!)^n \mu^{nz-1}} \frac{(\mu!)^n}{(n\mu)!} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n} + \mu\right) = \gamma_z \frac{\Gamma(nz + n\mu)}{n^{n\mu}(n\mu)!\, n^{nz-1} \mu^{nz-1}}.$$

Nun ist nach der bekannten *Stirling*schen Formel[1])

$$p! = \sqrt{2\pi p}\, p^p e^{-p}(1 + \varepsilon_p),\ \lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0,$$

also

$$\frac{(\mu!)^n}{(n\mu)!} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \mu^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} n^{n\mu}} (1 + \delta_\mu),\ \lim_{\mu=\infty} \delta_\mu = 0;$$

---

1) *Stirling*, **1.**, S. 135; vgl. z. B. *Nielsen*, **1.**, S. 92.

daher wird unsere Gleichung nach Multiplikation mit $n^{n\mu}$

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}(1+\delta_\mu)}{(\mu!)^n \mu^{nz-\frac{n+1}{2}}}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}+\mu\right)=\gamma_z\frac{\Gamma(nz+n\mu)}{(n\mu)!\,(n\mu)^{nz-1}}.$$

Jetzt lassen wir μ unendlich groß werden und berücksichtigen die Grenzbedingung[1])

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\Gamma(x+\nu)}{\nu!\,\nu^{x-1}}=1.$$

Danach ist

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{\Gamma(nz+n\mu)}{(n\mu)!\,(n\mu)^{nz-1}}=1,$$

$$\lim_{\mu=\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}+\mu\right)}{\mu!\,\mu^{z+\frac{k}{n}-1}}=\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{(\mu!)^n\,\mu^{nz-\frac{n+1}{2}}}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}+\mu\right)=1,$$

und zwar *für jedes* z; folglich, da $\lim\limits_{\mu=\infty}\delta_\mu=0$ ist,

$$\gamma_z=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\quad\text{(von } z \text{ ganz unabhängig)},$$

und daher

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\,\Gamma(nz).$$

Das ist das *Gauß*sche Theorem; für $z=\frac{1}{n}$ folgt die *Euler*sche Relation[2])

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Unser Beweis benutzt weder den *Euler*schen Integralausdruck noch den *Euler-Gauß*schen Produktausdruck für die Gammafunktion[3]), sondern lediglich ihre Eigenschaft, der linearen Differenzengleichung $y_{x+1}=xy_x$ zu genügen, zusammen mit der bereits bei *Gauß*[4]) implizite enthaltenen Grenzbedingung von *Weierstraß.*

Aus unseren obigen Auseinandersetzungen geht hervor, daß die Koeffizienten der Differenzengleichung (1) durch die Elemente eines beliebigen Fundamentalsystems $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ eindeutig bestimmt sind, falls der Koeffizient von y_{x+n} gleich 1 genommen wird. Nun genügen aber die Funktionen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ offenbar der homogenen linearen Differenzengleichung[5])

---

1) 1. Kap. II, C, Gl. (14). 2) *Euler*, **3.** 3) 1. Kap., II, C.
4) *Gauß*, **1.**, Art. 22, Gl. [47]. 5) Vgl. 2. Kap., II, A, Gl. (5).

$$D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) \equiv \begin{vmatrix} y_x & y_x^{(1)} & \ldots & y_x^{(n)} \\ y_{x+1} & y_{x+1}^{(1)} & \ldots & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_{x+n} & y_{x+n}^{(1)} & \ldots & y_{x+n}^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

von der sie ein Fundamentalsystem von Lösungen konstituieren. Daher muß $P(y_x)$ mit $D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$ bis auf einen Faktor übereinstimmen, der sich aus der Vergleichung der Koeffizienten von y_{x+n} gleich $(-1)^n D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)$ ergibt; es ist also

$$(5) \qquad P(y_x) = (-1)^n \frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)},$$

und für die Koeffizienten $p_x^{(0)}, p_x^{(1)}, \ldots, p_x^{(n-1)}$ ergeben sich die Ausdrücke

$$D_x p_x^{(k)} = (-1)^n \frac{\partial D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{\partial y_{x+k}},$$

die natürlich mit den Ausdrücken (2) übereinstimmen.

Ist $Q(y_x) = 0$ irgend eine homogene lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung, welche ebenfalls die Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ besitzt, so muß nach unseren Auseinandersetzungen identisch

$$Q(y_x) = q_x P(y_x)$$

sein, wo q_x nur von x abhängt. Besitzt daher die Gleichung $Q(y_x) = 0$ eine von den $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ linear unabhängige Lösung η_x, so folgt aus

$$Q(\eta_x) = q_x P(\eta_x) = 0,$$

da $P(\eta_x) \neq 0$ ist, daß $q_x = 0$ sein muß; also:

Die linke Seite einer homogenen linearen Differenzengleichung n^{ter} Ordnung, welche mehr als n linear unabhängige Lösungen besitzt, ist identisch gleich Null.

IV. Gemeinsame Lösungen homogener linearer Differenzengleichungen; Resultante; Kettenbruchverfahren.

Die Frage nach den gemeinschaftlichen Lösungen zweier algebraischer Gleichungen oder nach den gemeinschaftlichen Integralen zweier homogener linearer Differentialgleichungen findet ihr Analogon in der Frage, wann zwei homogene lineare Differenzengleichungen gemeinsame Lösungen besitzen.

Es seien also zwei homogene lineare Differenzengleichungen

$$(1)\qquad P(y_x) \equiv P(p_x, y_x) \equiv p_x^{(0)} y_{x+m} + p_x^{(1)} y_{x+m-1} + \cdots + p_x^{(m)} y_x = 0,$$

$$(2)\qquad Q(y_x) \equiv Q(q_x, y_x) \equiv q_x^{(0)} y_{x+n} + q_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + q_x^{(n)} y_x = 0$$

vorgelegt, und zwar möge $m - n = \nu \geqq 0$ sein; ferner seien

$$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)} \quad \text{und} \quad \eta_x^{(1)}, \eta_x^{(2)}, \ldots, \eta_x^{(n)}$$

je ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichungen (1) bzw. (2). Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen (1) und (2) eine gemeinsame Lösung besitzen, das identische Verschwinden der Determinante

$$S \equiv \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & \cdots & y_x^{(m)} & \eta_x^{(1)} & \cdots & \eta_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+1}^{(m)} & \eta_{x+1}^{(1)} & \cdots & \eta_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{x+m+n-1}^{(1)} & \cdots & y_{x+m+n-1}^{(m)} & \eta_{x+m+n-1}^{(1)} & \cdots & \eta_{x+m+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Nach dem Satze von *Casorati* ist nämlich das Verschwinden dieser Determinante die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen einer Relation

$$(3)\qquad \alpha_1 y_x^{(1)} + \cdots + \alpha_m y_x^{(m)} + \beta_1 \eta_x^{(1)} + \cdots + \beta_n \eta_x^{(n)} = 0,$$

worin die α und β „Konstanten" bedeuten. Und da weder alle α noch alle β gleich Null sein können, weil sonst die $y_x^{(k)}$ oder $\eta_x^{(k)}$ kein Fundamentalsystem bilden würden, so ist alsdann eine Lösung von (1) gleich einer solchen von (2).[1])

Die Determinante S ist vollständig analog dem in der Algebra vorkommenden Produkt sämtlicher Differenzen zwischen den Wurzeln der einen und der anderen der beiden algebraischen Gleichungen und zeigt ebenso evident wie dieses durch ihr Verschwinden das Vorhandensein gemeinsamer Lösungen an. Wie in der Algebra streben wir aber auch hier nach einer Bedingung, die sich nicht in den *Lösungen*, sondern in den *Koeffizienten* der vorgelegten Gleichungen ausdrückt; diese erhalten wir z. B. auf folgende Weise[2]): Da jede Lösung von (2) in der Form

$$\omega_1 \eta_x^{(1)} + \omega_2 \eta_x^{(2)} + \cdots + \omega_n \eta_x^{(n)}$$

darstellbar ist, so müssen sich, wenn die Gleichung (1) durch eine

1) *W.*; vgl. *Heffter,* Zur Theorie der Resultanten zweier h. l. Differentialgleichungen, Arch. d. Math. u. Phys. (3) **3**, 124—131.

2) *Wallenberg,* **4.**, S. 214ff.; vgl. *Schlesinger,* Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, Bd. I, 42ff. u. *Stephansen,* **2.**

Lösung von (2) befriedigt werden soll, die „Konstanten" $\omega_1, \ldots$ so bestimmen lassen, daß

$$P\left(\omega_1 \eta_x^{(1)} + \cdots + \omega_n \eta_x^{(n)}\right) = \omega_1 P\left(\eta_x^{(1)}\right) + \cdots + \omega_n P\left(\eta_x^{(n)}\right) = 0$$

ist; d. h. die n Funktionen $P\left(\eta_x^{(k)}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dürfen nicht l unabhängig sein; die Bedingung dafür ist nach dem *Casoratis* Satze das identische Verschwinden der Determinante dieser Funktic es muß also

$$\left| P\left(p_{x+k-1}, \eta_{x+k-1}^{(i)}\right) \right| = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sein. Nun kann man aber, wenn η_x eine Lösung der Differer gleichung (2) ist, $\eta_{x+n}, \eta_{x+n+1}, \ldots$ mittels dieser Gleichung sul sive linear homogen durch $\eta_x, \eta_{x+1}, \ldots, \eta_{x+n-1}$ ausdrücken, Koeffizienten, die sich aus den $q_x^{(0)}, q_x^{(1)}, \ldots, q_x^{(n)}$ und ihren sukzess Werten rational zusammensetzen; daher ist

$$P(p_{x+r}, \eta_{x+r}) = a_x^{(r_0)} \eta_x + a_x^{(r_1)} \eta_{x+1} + \cdots + a_x^{(r_{n-1})} \eta_{x+n-1},$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots),$$

worin die Funktionen $a_x^{(r_s)}$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ sich aus den Ko zienten der Gleichungen (1) und (2) und ihren sukzessiven We rational zusammensetzen. Folglich ist nach dem Multiplikationss der Determinanten[1]):

$$(4) \quad \left| P\left(p_{x+k-1}, \eta_{x+k-1}^{(i)}\right) \right| = \left| a_x^{(r_s)} \right| \cdot \left| \eta_{x+k-1}^{(i)} \right| \quad \begin{pmatrix} r, s = 0, 1, \ldots, n - \\ i, k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

und da als Determinante eines Fundamentalsystems

$$\left| \eta_{x+k-1}^{(i)} \right| \neq 0$$

ist, so ergibt sich zunächst als *notwendige* Bedingung für die Exis gemeinsamer Lösungen der Gleichungen (1) und (2):

$$(5) \qquad R \equiv \left| a_x^{(r_s)} \right| = 0 \quad (r, s = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; denn aus $R = 0$ f nach (4)

$$\left| P\left(p_{x+k-1}, \eta_{x+k-1}^{(i)}\right) \right| = 0, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

und hieraus nach dem Satze von *Casorati*:

$$\omega_1 P\left(\eta_x^{(1)}\right) + \cdots + \omega_n P\left(\eta_x^{(n)}\right) = P\left(\omega_1 \eta_x^{(1)} + \cdots + \omega_n \eta_x^{(n)}\right) = 0;$$

das heißt aber, die Gleichung (1) wird durch eine Lösung der G chung (2) befriedigt. — Die Determinante R kann daher mit I

1) *Baltzer*, l. c.

und Recht als *Resultante* der Gleichungen (1) und (2) bezeichnet werden.[1])

Wir können jedoch auf die Differenzengleichungen (1) und (2) auch ein Verfahren anwenden, welches dem *Euklid*ischen Kettenbruchverfahren zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen bzw. zweier Polynome analog ist.[2]) Dieses Verfahren hat den Vorzug, daß es sogleich *sämtliche* gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (1) und (2) liefert: Zu diesem Zwecke bilden wir zunächst den Ausdruck

$$(6) \qquad P(p_x, y_x) - r_x^{(1_0)} Q(q_{x+\nu}, y_{x+\nu}), \quad (\nu = m - n),$$

und bestimmen $r_x^{(1_0)}$ so, daß darin der Koeffizient von y_{x+m} verschwindet $\left(\text{es ergibt sich } r_x^{(1_0)} = \frac{p_x^{(0)}}{q_{x+\nu}^{(0)}}\right)$, sodaß dann (6) einen homogenen linearen Differenzenausdruck $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt; ebenso kann man ferner eine Funktion $r_x^{(1_1)}$ so bestimmen, daß

$$P(p_x, y_x) - r_x^{(1_0)} Q(q_{x+\nu}, y_{x+\nu}) - r_x^{(1_1)} Q(q_{x+\nu-1}, y_{x+\nu-1})$$

nur von der $m-2^{\text{ten}}$ Ordnung ist; fährt man so fort, so ist, wenn zur Abkürzung $Q(q_x, y_x) = Q_x$ gesetzt wird, bei geeigneter Wahl der Funktionen $r_x^{(1_0)}, r_x^{(1_1)}, \ldots, r_x^{(1_\nu)}$ die linke Seite der Differenzengleichung (1) in der Form

$$(7) \qquad P(y_x) = r_x^{(1_0)} Q_{x+\nu} + r_x^{(1_1)} Q_{x+\nu-1} + \cdots + r_x^{(1_\nu)} Q_x + Q_1(y_x)$$

darstellbar, worin $Q_1(y_x)$ einen homogenen linearen Differenzenausdruck höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet, dessen Koeffizienten sich ebenso wie die Funktionen $r_x^{(1_0)}, r_x^{(1_1)}, \ldots, r_x^{(1_\nu)}$ aus den Koeffizienten $p_x^{(k)}, q_x^{(k)}$ und den sukzessiven Werten der $q_x^{(k)}$ rational zusammensetzen. Setzt man noch

$$R_1(y_x) \equiv r_x^{(1_0)} y_{x+\nu} + r_x^{(1_1)} y_{x+\nu-1} + \cdots + r_x^{(1_\nu)} y_x,$$

so läßt sich, wenn man R_1 als *Operationssymbol* auffaßt, die Gleichung (7) nach Unterdrückung des Argumentes y_x kurz in der Form schreiben:

$$(8) \qquad P = R_1(Q) + Q_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß etwa vorhandene gemeinsame Lösungen

1) Der tiefere Grund für die Darstellbarkeit der Resultante als rationale Funktion der Koeffizienten $p_x^{(k)}, q_x^{(k)}$ und ihrer sukzessiven Werte wird sich später aus dem Analogon des *Appell*schen Satzes (4. Kap., I) ergeben.

2) *Pincherle,* **6.** u. **9.**; *Mansion,* **1.**; *Guldberg,* **5.**

von (1) und (2) auch der Gleichung $Q_s y = 0$ genügen müssen. Bildet man nun weiter in derselben Weise

(9)
$$\begin{vmatrix} Q & R_2 Q_1 & Q_2 \\ Q_1 & R_3 Q_2 & Q_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{s-1} & R_{s+1} Q_s & Q_{s+1} \end{vmatrix}$$

und ist n_k die Ordnungszahl des Differenzausdruckes Q_k, so ist

$$n_1 > n_2 > n_3 > \cdots$$

und es muß daher n_s spätestens für $k = n_1 + 1$ verschwinden. Ist $n_{s+1} = 0$, $n_s \neq 0$, so ist entweder Q_{s+1} von der Form $q_x y$ oder, falls $q_x = 0$ ist, Q_{s+1} *identisch gleich Null.* Im ersten Falle haben die Differenzengleichungen (1) und (2) nur die triviale Lösung $y = 0$ gemeinsam; wir sagen dann: *sie haben keine gemeinsame Lösung; im letzteren Falle dagegen werden die sämtlichen gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (1) und (2) durch die Lösungen der Gleichung*

(10)
$$Q_s y = 0$$

gegeben. Die Koeffizienten dieser Gleichung [illegible], wie aus dem Algorithmus (9) hervorgeht, aus den Koeffizienten der Gleichungen (1) und (2) und deren sukzessiven Werten [illegible] zusammen; sind also die letzteren insbesondere rationale Funktionen [illegible], so gilt dies auch von den Koeffizienten der Gleichung (10). Haben z. B. die Gleichungen $P y = 0$ und $Q y = 0$ [illegible] von Null verschiedene Lösung[1] gemeinsam, so ist $Q_s y = 0$ [illegible] lineare Differenzengleichung *erster* Ordnung; die gemeinsame Lösung kann also durch „Quadratur"[2] gefunden werden.

V. Zusammensetzung homogener linearer Differenzenausdrücke; symbolisches Produkt derselben.

Als besonders wichtiger Fall [illegible] alle Lösungen der Gleichung (2) [illegible] In diesem Falle müssen infolge [illegible] linear unabhängigen Lösungen von (2) [illegible] Q_s [illegible] befriedigen, und da diese [illegible] müssen nach dem Schlußsatze von Nr. III [illegible] Q_s [illegible] *identisch verschwinden,* d. h. es muß

$$P = R Q$$

[1] Lösungen, die [illegible] dabei nicht als voneinander ver[illegible]

sein. Indem wir die Klammer (und den Index 1) unterdrücken, können wir diese Gleichung kürzer schreiben:

$$P = RQ, \tag{11}$$

und wir sagen: *Der Differenzenausdruck $P(y_x)$ ist aus den Differenzenausdrücken $Q(y_x)$ und $R(y_x)$ in dieser bestimmten Reihenfolge zusammengesetzt;* d. h. er geht aus $R(y_x)$ dadurch hervor, daß man darin y_x durch den Differenzenausdruck $Q(y_x)$ ersetzt, oder dadurch, daß man auf $Q(y_x)$ die durch das Symbol R dargestellte Operation ausübt. Wir haben also den

Satz: *Die linke Seite einer homogenen linearen Differenzengleichung $P(y_x) = 0$, die durch alle Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ befriedigt wird, läßt sich aus $Q(y_x)$ und aus einem durch P und Q eindeutig bestimmten Differenzenausdruck R, dessen Ordnung gleich der Differenz der Ordnungszahlen von P und Q ist, zusammensetzen; die Koeffizienten von R sind rationale Funktionen der Koeffizienten $p_x^{(k)}$, $q_x^{(k)}$ und der sukzessiven Werte der $q_x^{(k)}$, also insbesondere rationale Funktionen von x, wenn die Koeffizienten $p_x^{(k)}$ und $q_x^{(k)}$ rationale Funktionen von x sind.*

Ist umgekehrt ein Differenzenausdruck P aus den beiden Differenzenausdrücken Q und R zusammengesetzt, besteht also die Gleichung (11), so ist die Ordnungszahl von P gleich der Summe der Ordnungszahlen von Q und R, und die Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ wird durch alle Lösungen von $Q(y_x) = 0$ befriedigt. Ferner sieht man ohne weiteres, daß der Koeffizient von y_x in P gleich dem Produkt der Koeffizienten von y_x in Q und R ist:

$$p_x^{(m)} = r_x^{(\nu)} q_x^{(n)}, \quad (m = n + \nu),$$

und zwar können die Koeffizienten $q_x^{(n)}$ und $r_x^{(\nu)}$ von Null verschieden vorausgesetzt werden, falls nicht Q oder R identisch verschwindet, da sich sonst Q und R auf Differenzenausdrücke niedrigerer Ordnung reduzieren[1]); daher ist auch $p_x^{(m)} \neq 0$. Den Ausdruck $P = QR$ nennt man das (symbolische) Produkt der Ausdrücke Q und R; dieser Begriff läßt sich sofort auf mehrere Differenzenausdrücke ausdehnen, z. B.

$$P = TSRQ,$$

und auch für einen solchen Ausdruck gilt der eben ausgesprochene Satz über die Koeffizienten von y_x.

Für das symbolische Produkt linearer Differenzenausdrücke gilt ferner offenbar das *assoziative* und das *distributive* Gesetz, d. h. es ist

1) Vgl. 1. Kap., I.

$$(SR)Q = S(RQ) = SRQ \tag{12}$$

und

$$(S \pm R)Q = SQ \pm RQ, \quad Q(S \pm R) = QS \pm QR; \tag{13}$$

dagegen gilt im allgemeinen *nicht* das *kommutative* Gesetz, d. h. es ist im allgemeinen

$$PQ \neq QP.^{1)}$$

Da der Koeffizient von y_x in einem zusammengesetzten Differenzenausdruck gleich dem Produkt aus den Koeffizienten von y_x in den (symbolischen) Faktoren ist, so erhält man nach dem oben Gesagten durch Zusammensetzung mehrerer nicht identisch verschwindender Differenzenausdrücke wieder einen nicht identisch verschwindenden Differenzenausdruck. *Wenn also das (symbolische) Produkt mehrerer Differenzenausdrücke identisch Null ist, so muß einer seiner Faktoren identisch gleich Null sein.* Wenn z. B.

$$P = SRQ$$

identisch verschwindet und es sind Q und S nicht identisch gleich Null, so muß R identisch gleich Null sein. Aus

$$SQ = RQ \quad \text{oder} \quad QS = QR,$$

d. h. nach (13) aus

$$(S - R)Q = 0 \quad \text{oder} \quad Q(S - R) = 0$$

folgt daher, wenn $Q \neq 0$ ist, notwendig $S = R$.

VI. Der größte gemeinsame Teiler[2]) und das kleinste Vielfache[3]) zweier homogener linearer Differenzenausdrücke.

Wenn zwei homogene lineare Differenzengleichungen

$$(1) \quad P(y_x) = 0 \quad \text{und} \quad (2) \quad Q(y_x) = 0$$

gemeinsame Lösungen besitzen, so konnten wir durch das Kettenbruchverfahren einen homogenen linearen Differenzenausdruck $T(y_x)$ herstellen, dessen Koeffizienten sich aus denen von (1) und (2) und deren sukzessiven Werten rational zusammensetzen und der, gleich Null gesetzt, die *sämtlichen* gemeinsamen Lösungen von (1) und (2) und *nur* diese liefert (vgl. Nr. IV). Ferner können wir, da alle Lösungen von $T(y_x) = 0$ sowohl die Gleichung (1) als auch die Gleichung (2) be-

1) Vgl. 6. Kap., IV, C.

2) *Pincherle,* **6.** u. **9.**; *Mansion,* **1.**; *Guldberg,* **5.**; *W.*

3) *Guldberg,* **10.**; *W.* Vgl. *Stephansen,* **2.**

friedigen, nach den Auseinandersetzungen in Nr. V die Differenzenausdrücke P und Q in der symbolischen Form von Produkten

$$P = RT, \quad Q = ST \tag{14}$$

schreiben, worin R und S homogene lineare Differenzenausdrücke bedeuten, deren Koeffizienten sich ebenfalls aus denen von P und Q und deren sukzessiven Werten rational zusammensetzen. Ist m die Ordnungszahl von P, n die von Q $(m \geqq n)$ und λ die von T $(\lambda \leqq n)$, so ist R von der Ordnung $m - \lambda$ und S von der Ordnung $n - \lambda$. Die Ordnung λ von T gibt die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen an, welche die Gleichungen (1) und (2) gemeinsam haben; daher sind die Ausdrücke R und S nicht weiter in der symbolischen Form $R = LU$, $S = MU$ zerlegbar, worin U einen homogenen linearen Differenzenausdruck μ^{ter} Ordnung $(\mu > 0)$ bedeutet, da sonst nach (12) aus

$$P = (LU)T = L(UT), \quad Q = (MU)T = M(UT)$$

folgen würde, daß die Gleichungen (1) und (2) $\lambda + \mu$ linear unabhängige Lösungen gemeinsam hätten. *Wir können daher den Ausdruck T als den größten gemeinsamen (symbolischen) Teiler von P und Q bezeichnen.*

Aber auch der Begriff des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* findet sein Analogon in der Theorie der homogenen linearen Differenzenausdrücke. In der Tat läßt sich durch rationale Prozesse eine (bis auf einen Faktor in x) eindeutig bestimmte homogene lineare Differenzengleichung niedrigster Ordnung herstellen, welche *sowohl* durch die Lösungen von (1) *als auch* diejenigen von (2) befriedigt wird. Es sei

$$V(y_x) = 0 \tag{15}$$

diese Differenzengleichung; dann muß nach Nr. V:

$$V = AP = BQ \tag{16}$$

sein, worin auch A und B homogene lineare Differenzenausdrücke bedeuten. Wir nehmen nun zunächst an, daß die Gleichungen (1) und (2) keine gemeinsamen Lösungen, d. h. die Ausdrücke P und Q keinen gemeinsamen Teiler besitzen; dann wird die Gleichung (15) jedenfalls durch die Lösungen von (1) und (2):

$$y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(m)}, \ \eta_x^{(1)}, \ldots, \eta_x^{(n)} \tag{17}$$

befriedigt, und diese sind linear unabhängig, da aus dem Bestehen einer Relation (3) (Nr. IV) die Gleichheit zweier Lösungen von (1) und (2) folgen würde, entgegen unserer Annahme. Da nun $V(y_x) = 0$ die Gleichung *niedrigster* Ordnung sein soll, welche durch die Lösungen von (1) und (2) befriedigt wird, so darf die Gleichung (15) auch

keine *weiteren* von den Lösungen (17) *linear unabhängigen* Lösungen besitzen; diese bilden daher ein Fundamentalsystem der Gleichung (15); daraus folgt, daß der Differenzenausdruck $V(y_x)$ genau von der Ordnung $m + n$ ist.

Wenn dagegen P und Q den größten gemeinsamen Teiler T von der Ordnung λ besitzen, also nach (14)

$$P = RT, \quad Q = ST$$

ist, so haben die Ausdrücke R von der Ordnung $m - \lambda$ und S von der Ordnung $n - \lambda$ keinen gemeinsamen Teiler mehr; ihr kleinstes gemeinsames Vielfache

$$U = AR = BS$$

ist daher nach dem Vorangehenden von der Ordnung $m - \lambda + n - \lambda = m + n - 2\lambda$.

Wir behaupten nun, daß $V = UT$ das kleinste Vielfache der Ausdrücke P und Q ist; in der Tat ist nach (12):

$$V = UT = (AR)T = A(RT) = AP,$$
$$V = UT = (BS)T = B(ST) = BQ;$$

ferner ist V von der Ordnung $(m + n - 2\lambda) + \lambda = m + n - \lambda$, und daß V nicht von kleinerer Ordnung sein kann, wird ähnlich wie oben bewiesen.

Wenn also zwei homogene lineare Differenzenausdrücke von der Ordnung m bzw. n keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so ist ihr kleinstes gemeinsames Vielfache von der Ordnung $m + n$; besitzen sie dagegen den größten gemeinsamen Teiler von der Ordnung λ, so ist ihr kleinstes Vielfache von der Ordnung $m + n - \lambda$.

Wir schreiten nun zur wirklichen Herstellung des kleinsten Vielfachen der beiden Differenzenausdrücke P und Q, die wir nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen ohne gemeinsamen Teiler voraussetzen dürfen, da die Abtrennung eines solchen etwaigen Teilers nach dem Kettenbruchverfahren durch rationale Prozesse geschehen kann. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Relation

$$V = AP = BQ, \tag{16}$$

worin die zu suchenden Differenzenausdrücke A und B von der Ordnung n bzw. m sind:

$$A \equiv a_x^{(n)} y_x + a_x^{(n-1)} y_{x+1} + \cdots + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + a_x^{(0)} y_{x+n}, \quad (a_x^{(0)}, a_x^{(n)} \neq 0),$$
$$B \equiv b_x^{(m)} y_x + b_x^{(m-1)} y_{x+1} + \cdots + b_x^{(1)} y_{x+m-1} + b_x^{(0)} y_{x+m}, \quad (b_x^{(0)}, b_x^{(m)} \neq 0).$$

Wenn wir uns auch P und Q nach aufsteigenden sukzessiven Werten

y_x geordnet denken, so ist:

$$= a_x^{(n)} p_x^{(m)} y_x + \left(a_x^{(n)} p_x^{(m-1)} + a_x^{(n-1)} p_{x+1}^{(m)}\right) y_{x+1} + \cdots + a_x^{(0)} p_{x+n}^{(0)} y_{x+m+n},$$

$$= b_x^{(m)} q_x^{(n)} y_x + \left(b_x^{(m)} q_x^{(n-1)} + b_x^{(m-1)} q_{x+1}^{(n)}\right) y_{x+1} + \cdots + b_x^{(0)} q_{x+m}^{(0)} y_{x+m+n}.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+m+n}$ ...en wir das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} p_x^{(m)} a_x^{(n)} = q_x^{(n)} b_x^{(m)}, \\ p_x^{(m-1)} a_x^{(n)} + p_{x+1}^{(m)} a_x^{(n-1)} = q_x^{(n-1)} b_x^{(m)} + q_{x+1}^{(n)} b_x^{(m-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{x+n-1}^{(0)} a_x^{(1)} + p_{x+n}^{(1)} a_x^{(0)} = q_{x+m-1}^{(0)} b_x^{(1)} + q_{x+m}^{(1)} b_x^{(0)}, \\ p_{x+n}^{(0)} a_x^{(0)} = q_{x+m}^{(0)} b_x^{(0)}. \end{cases}$$

... sind $m+n+1$ homogene lineare Gleichungen für die $m+n+2$ ...kannten $a_x^{(0)}, \ldots, a_x^{(n)}, b_x^{(0)}, \ldots, b_x^{(m)}$, deren Verhältnisse sich ...us sukzessive berechnen lassen; dieselben sind rationale Funk-...n der Koeffizienten p_x, q_x und ihrer sukzessiven Werte.

Aus dem Gleichungssystem (18) ergibt sich noch eine neue Form ...edingung für die Existenz gemeinsamer Lösungen der Gleichungen ...nd (2), d. h. für die Existenz eines gemeinsamen Teilers der Aus-...e P und Q; dieselbe ist nämlich, wie wir gesehen haben, gleich-...tend damit, daß die Ordnungszahl des kleinsten gemeinsamen ...achen kleiner als $m+n$ wird. Ist aber $a_x^{(0)} = 0$ und daher ...n $q_x^{(0)} \neq 0$ auch $b_x^{(0)} = 0$, so stellt das System (18) $m+n$ homo-... lineare Gleichungen für die $m+n$ Unbekannten $a_x^{(1)}, \ldots, a_x^{(n)}$, ..., $b_x^{(m)}$ dar, die nicht sämtlich verschwinden dürfen, da sonst V ...sch Null wäre. Es muß also die Determinante

$$\begin{vmatrix} p_x^{(m)} & 0 & 0 \,.\,. & . & q_x^{(n)} & 0 & 0 \,.\,. & . \\ p_x^{(m-1)} & p_{x+1}^{(m)} & 0 \,.\,. & . & q_x^{(n-1)} & q_{x+1}^{(n)} & 0 \,.\,. & . \\ . & . & . \,.\,. & . & . & . & . \,.\,. & . \\ 0 & 0 & 0 \,.\,. & p_{x+n-1}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \,.\,. & q_{x+m-1}^{(0)} \end{vmatrix} = 0$$

... dies ist die gesuchte Bedingung, die natürlich mit $R = 0$ (Nr. IV, ...)) übereinstimmen muß.

1. Beispiel (W.).

$$P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_{x+2} + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(2)} y_x = 0,$$

$$Q(y_x) \equiv q_x^{(0)} y_{x+1} - q_x^{(1)} y_x = 0, \quad \left(q_x^{(0)} \neq 0\right).$$

Es sei η_x eine Lösung von $Q(y_x) = 0$:

$$\eta_{x+1} = \frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(0)}} \eta_x, \qquad \eta_{x+2} = \frac{q_{x+1}^{(1)}}{q_{x+1}^{(0)}} \eta_{x+1} = \frac{q_{x+1}^{(1)}}{q_{x+1}^{(0)}} \frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(0)}} \eta_x;$$

$$P(\eta_x) = p_x^{(0)} \eta_{x+2} + p_x^{(1)} \eta_{x+1} + p_x^{(2)} \eta_x = \left(p_x^{(0)} \frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(0)}} \frac{q_{x+1}^{(1)}}{q_{x+1}^{(0)}} + p_x^{(1)} \frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(0)}} + p_x^{(2)}\right) \eta_x.$$

Die Resultante $R = |a_{r_s}|$ besteht hier aus dem einzigen Gliede a_{0_0}; es ist also:

$$R = \frac{1}{q_x^{(0)} q_{x+1}^{(0)}} \left(p_x^{(0)} q_x^{(1)} q_{x+1}^{(1)} + p_x^{(1)} q_x^{(1)} q_{x+1}^{(0)} + p_x^{(2)} q_x^{(0)} q_{x+1}^{(0)}\right).$$

Die Bedingung für eine gemeinsame Lösung ist $R = 0$, oder, da $q_x^{(0)} \neq 0$:

$$p_x^{(0)} q_x^{(1)} q_{x+1}^{(1)} + p_x^{(1)} q_x^{(1)} q_{x+1}^{(0)} + p_x^{(2)} q_x^{(0)} q_{x+1}^{(0)} = 0.$$

Zweite Form der Bedingung: Das kleinste Vielfache von P und Q sei $V = AP = BQ$, worin

$$A(y_x) \equiv a_x^{(1)} y_x + a_x^{(0)} y_{x+1}, \quad B(y_x) = b_x^{(2)} y_x + b_x^{(1)} y_{x+1} + b_x^{(0)} y_{x+2}.$$

$$\begin{aligned} AP = a_x^{(1)} p_x^{(2)} y_x &+ \left(a_x^{(1)} p_x^{(1)} + a_x^{(0)} p_{x+1}^{(2)}\right) y_{x+1} \\ &+ \left(a_x^{(1)} p_x^{(0)} + a_x^{(0)} p_{x+1}^{(1)}\right) y_{x+2} + a_x^{(0)} p_{x+1}^{(0)} y_{x+3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BQ = - b_x^{(2)} q_x^{(1)} y_x &+ \left(b_x^{(2)} q_x^{(0)} - b_x^{(1)} q_{x+1}^{(1)}\right) y_{x+1} \\ &+ \left(b_x^{(1)} q_{x+1}^{(0)} - b_x^{(0)} q_{x+2}^{(1)}\right) y_{x+2} + b_x^{(0)} q_{x+2}^{(0)} y_{x+3}. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}$ ergibt sich:

$$\begin{cases} p_x^{(2)} a_x^{(1)} & = - q_x^{(1)} b_x^{(2)}, \\ p_x^{(1)} a_x^{(1)} + p_{x+1}^{(2)} a_x^{(0)} & = q_x^{(0)} b_x^{(2)} - q_{x+1}^{(1)} b_x^{(1)}, \\ p_x^{(0)} a_x^{(1)} + p_{x+1}^{(1)} a_x^{(0)} & = q_{x+1}^{(0)} b_x^{(1)} - q_{x+2}^{(1)} b_x^{(0)}, \\ p_{x+1}^{(0)} a_x^{(0)} & = q_{x+2}^{(0)} b_x^{(0)}. \end{cases}$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die vier Verhältnisse $\frac{b_x^{(0)}}{a_x^{(0)}}, \frac{b_x^{(1)}}{a_x^{(0)}}, \frac{b_x^{(2)}}{a_x^{(0)}}, \frac{a_x^{(1)}}{a_x^{(0)}}$ berechnen; die Bedingung für eine gemeinsame Lösung war $a_x^{(0)} = b_x^{(0)} = 0$, d. h.

$$\begin{cases} p_x^{(2)} a_x^{(1)} + q_x^{(1)} b_x^{(2)} = 0, \\ p_x^{(1)} a_x^{(1)} - q_x^{(0)} b_x^{(2)} + q_{x+1}^{(1)} b_x^{(1)} = 0, \\ p_x^{(0)} a_x^{(1)} - q_{x+1}^{(0)} b_x^{(1)} = 0; \end{cases}$$

also

$$\begin{vmatrix} p_x^{(2)} & q_x^{(1)} & 0 \\ p_x^{(1)} & -q_x^{(0)} & q_{x+1}^{(1)} \\ p_x^{(0)} & 0 & -q_{x+1}^{(0)} \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$p_x^{(2)} q_x^{(0)} q_{x+1}^{(0)} + p_x^{(1)} q_x^{(1)} q_{x+1}^{(0)} + p_x^{(0)} q_x^{(1)} q_{x+1}^{(1)} = 0.$$

Diese Bedingung stimmt in der Tat mit der oben gefundenen überein.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_x^{(0)} = q_x^{(0)} = 1$ voraussetzen; dann lautet die Bedingung für eine gemeinsame Lösung der beiden Differenzengleichungen

$$P(y_x) \equiv y_{x+2} + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(2)} y_x = 0, \quad Q(y_x) \equiv y_{x+1} - q_x^{(1)} y_x = 0:$$

$$p_x^{(2)} = -q_x^{(1)} \left(p_x^{(1)} + q_{x+1}^{(1)}\right).$$

In der Tat wird, wenn

$$P(y_x) \equiv y_{x+2} + p_x^{(1)} y_{x+1} - q_x^{(1)} \left(p_x^{(1)} + q_{x+1}^{(1)}\right) y_x$$

ist:

$$P = RQ,$$

wo

$$R(y_x) \equiv y_{x+1} + \left(p_x^{(1)} + q_{x+1}^{(1)}\right) y_x.$$

2. Beispiel (W.). [1])

$$P(p_x, y_x) \equiv y_{x+2} + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(2)} y_x = 0,$$

$$Q(q_x, y_x) \equiv y_{x+2} + q_x^{(1)} y_{x+1} + q_x^{(2)} y_x = 0.$$

η_x Lösung von $Q(q_x, y_x) = 0$: $\eta_{x+2} = -q_x^{(1)} \eta_{x+1} - q_x^{(2)} \eta_x$;

1) Vgl. *Stephansen*, **2.**

$$P(p_x, \eta_x) = \left(p_x^{(2)} - q_x^{(2)}\right)\eta_x + \left(p_x^{(1)} - q_x^{(1)}\right)\eta_{x+1} \equiv d_x^{(2)}\eta_x + d_x^{(1)}\eta_{x+1},$$

$$P(p_{x+1}, \eta_{x+1}) = -\,d_{x+1}^{(1)} q_x^{(2)}\eta_x + \left(d_{x+1}^{(2)} - d_{x+1}^{(1)} q_x^{(1)}\right)\eta_{x+1}.$$

Die Resultante ist hier also

$$R = \begin{vmatrix} d_x^{(2)} & d_x^{(1)} \\ -q_x^{(2)} d_{x+1}^{(1)} & d_{x+1}^{(2)} - q_x^{(1)} d_{x+1}^{(1)} \end{vmatrix}$$

und $R = 0$ die Bedingung für eine gemeinsame Lösung.

Das kleinste Vielfache von P und Q sei wieder $V = AP = BQ$, worin

$$A(y_x) \equiv a_x^{(2)} y_x + a_x^{(1)} y_{x+1} + a_x^{(0)} y_{x+2}, \quad B(y_x) \equiv b_x^{(2)} y_x + b_x^{(1)} y_{x+1} + b_x^{(0)} y_{x+2};$$

$$AP = a_x^{(2)} p_x^{(2)} y_x + \left(a_x^{(2)} p_x^{(1)} + a_x^{(1)} p_{x+1}^{(2)}\right) y_{x+1}$$

$$+ \left(a_x^{(2)} + a_x^{(1)} p_{x+1}^{(\,)} + a_x^{(0)} p_{x+2}^{(2)}\right) y_{x+2} + \left(a_x^{(1)} + a_x^{(0)} p_{x+2}^{(1)}\right) y_{x+3} + a_x^{(0)} y_{x+4},$$

$$BQ = b_x^{(2)} q_x^{(2)} y_x + \left(b_x^{(2)} q_x^{(1)} + b_x^{(1)} q_{x+1}^{(2)}\right) y_{x+1}$$

$$+ \left(b_x^{(2)} + b_x^{(1)} q_{x+1}^{(1)} + b_x^{(0)} q_{x+2}^{(2)}\right) y_{x+2} + \left(b_x^{(1)} + b_x^{(0)} q_{x+2}^{(1)}\right) y_{x+3} + b_x^{(0)} y_{x+4}.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}, y_{x+4}$ erhält man fünf homogene lineare Gleichungen für die sechs Größen $a_x^{(0)}, a_x^{(1)}, a_x^{(2)}, b_x^{(0)}, b_x^{(1)}, b_x^{(2)}$, deren Verhältnisse daraus berechnet werden können. Die Bedingung für eine gemeinsame Lösung ist wieder $a_x^{(0)} = b_x^{(0)} = 0$, also:

$$\begin{cases} p_x^{(2)} a_x^{(2)} = q_x^{(2)} b_x^{(2)}, \\ p_x^{(1)} a_x^{(2)} + p_{x+1}^{(2)} a_x^{(1)} = q_x^{(1)} b_x^{(2)} + q_{x+1}^{(2)} b_x^{(1)}, \\ a_x^{(2)} + p_{x+1}^{(1)} a_x^{(1)} = b_x^{(2)} + q_{x+1}^{(1)} b_x^{(1)}, \\ a_x^{(1)} = b_x^{(1)}, \end{cases}$$

woraus

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} p_x^{(2)} & 0 & q_x^{(2)} & 0 \\ p_x^{(1)} & p_{x+1}^{(2)} & q_x^{(1)} & q_{x+1}^{(2)} \\ 1 & p_{x+1}^{(1)} & 1 & q_{x+1}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

folgt; durch Subtraktion der dritten von der ersten, der vierten von der zweiten Kolonne ergibt sich:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_x^{(2)} & 0 & q_x^{(2)} & 0 \\ d_x^{(1)} & d_{x+1}^{(2)} & q_x^{(1)} & q_{x+1}^{(2)} \\ 0 & d_{x+1}^{(1)} & 1 & q_{x+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_x^{(2)} & 0 & q_x^{(2)} \\ d_x^{(1)} & d_{x+1}^{(2)} & q_x^{(1)} \\ 0 & d_{x+1}^{(1)} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_x^{(2)} & -q_x^{(2)} d_{x+1}^{(1)} & q_x^{(2)} \\ d_x^{(1)} & d_{x+1}^{(2)} - q_x^{(1)} d_{x+1}^{(1)} & q_x^{(1)} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_x^{(2)} & -q_x^{(2)} d_{x+1}^{(1)} \\ d_x^{(1)} & d_{x+1}^{(2)} - q_x^{(1)} d_{x+1}^{(1)} \end{vmatrix} = R.$$

Drittes Kapitel.

Formale Theorien. 2. Teil.

I. Reduktion der Ordnung einer homogenen linearen Differenzengleichung bei Kenntnis einiger partikulärer Lösungen.[1]

Es sei eine homogene lineare Differenzengleichung

$$(1)\qquad P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_x + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(2)} y_{x+2} + \cdots \\ \cdots + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + y_{x+n} = 0, \quad (p_x^{(0)} \neq 0),$$

vorgelegt und eine von Null verschiedene Partikularlösung derselben, $y_x^{(1)} = \eta_x^{(1)}$, bekannt. Nun ist, wenn man die Formel[2]

$$z_{x+k} = z_x + k\Delta z_x + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 z_x + \cdots + \Delta^k z_x$$

berücksichtigt:

$$P(\eta_x z_x) = p_x^{(0)} \eta_x z_x + p_x^{(1)} \eta_{x+1}(z_x + \Delta z_x) + p_x^{(2)} \eta_{x+2}(z_x + 2\Delta z_x + \Delta^2 z_x) + \cdots \\ \cdots + \eta_{x+n}(z_x + n\Delta z_x + \cdots + \Delta^n z_x),$$

oder

$$(2)\quad P(\eta_x z_x) = P(\eta_x) z_x + P_1(\eta_x)\Delta z_x + P_2(\eta_x)\Delta^2 z_x + \cdots + \eta_{x+n}\Delta^n z_x,$$

worin

$$(3)\quad P_k(\eta_x) = \binom{k}{k} p_x^{(k)} \eta_{x+k} + \binom{k+1}{k} p_x^{(k+1)} \eta_{x+k+1} + \cdots + \binom{n}{k}\eta_{x+n}[3] \\ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Setzt man daher in (1) $y_x = \eta_x^{(1)} z_x$, so resultiert, da $P(\eta_x^{(1)}) = 0$ ist, für z_x die Gleichung:

$$P\left(\eta_x^{(1)} z_x\right) \equiv P_1\left(\eta_x^{(1)}\right)\Delta z_x + P_2\left(\eta_x^{(1)}\right)\Delta^2 z_x + \cdots + \eta_{x+n}^{(1)}\Delta^n z_x = 0,$$

---

1) *Tardy*, **1.**; *Guldberg*, **1.**, **3.**, **11.**; *Wallenberg*, **6.**, Nr 1.

2) Vgl. 1. Kap., I.

3) $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$.

oder, wenn man $\Delta z_x = u_x$, d. h. $z_x = \sum u_x$ setzt und die Formel

$$\Delta^k u_x = (D-1)^k u_x \text{ [1]}$$

berücksichtigt, für u_x die homogene lineare Differenzengleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(4) \qquad Q(u_x) \equiv q_x^{(0)} u_x + q_x^{(1)} u_{x+1} + \cdots + q_x^{(n-1)} u_{x+n-1} = 0 .$$

Darin ist

$$q_x^{(n-1)} = \eta_{x+n}^{(1)} \quad (\neq 0)$$

und

$$q_x^{(0)} = P_1\left(\eta_x^{(1)}\right) - P_2\left(\eta_x^{(1)}\right) + P_3\left(\eta_x^{(1)}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} \eta_{x+n}^{(1)} .$$

Der Koeffizient von $p_x^{(\nu)} \eta_{x+\nu}^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in $q_x^{(0)}$ ist

$$\binom{\nu}{1} - \binom{\nu}{2} + \binom{\nu}{3} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{\nu} = 1,$$

da

$$(1-1)^\nu = 1 - \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} - \cdots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} = 0$$

ist; also

$$q_x^{(0)} = p_x^{(1)} \eta_{x+1}^{(1)} + p_x^{(2)} \eta_{x+2}^{(1)} + \cdots + \eta_{x+n}^{(1)} = -p_x^{(0)} \eta_x^{(1)}, \text{ [2]}$$

und daher auch $q_x^{(0)} \neq 0$.

Bedeutet nun $\eta_x^{(2)}$ eine von Null verschiedene Partikularlösung der Gleichung (4), so ist

$$y_x^{(2)} = \eta_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)}$$

eine zweite Lösung der vorgelegten Gleichung (1), und ist umgekehrt $y_x^{(2)}$ eine zweite Lösung von (1), so ist

$$\eta_x^{(2)} = \Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}$$

eine Lösung von (4). Setzen wir in (4)

$$u_x = \eta_x^{(2)} \sum v_x,$$

so ergibt sich in derselben Weise für v_x eine homogene lineare Differenzengleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(5) \qquad R(v_x) \equiv r_x^{(0)} v_x + r_x^{(1)} v_{x+1} + \cdots + r_x^{(n-2)} v_{x+n-2} = 0 .$$

---

1) 1. Kap., I. 2) *Wallenberg*, 6., Nr. 1.

Ist ferner $\eta_x^{(3)}$ eine Partikularlösung der Gleichung (5), so ist $\eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)}$ eine zweite Lösung von (4) und

$$y_x^{(3)} = \eta_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)}$$

eine dritte Lösung von (1); und ist umgekehrt $y_x^{(3)}$ eine dritte Lösung von (1), so ist

$$\eta_x^{(3)} = \Delta \frac{\Delta \dfrac{y_x^{(3)}}{y_x^{(1)}}}{\Delta \dfrac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}}$$

eine Lösung von (5). Fährt man so fort, so gelangt man schließlich zu einer Differenzengleichung erster Ordnung

$$t_x w_x + w_{x+1} = 0,$$

deren Lösungen die Form

$$w_x = \omega(-1)^x \prod t_x$$

haben[1]); ist $\eta_x^{(n)}$ eine solche (von Null verschiedene) Lösung, so ist

$$y_x^{(n)} = \eta_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)} \cdots \sum \eta_x^{(n)}$$

eine n^{te} Partikularlösung von (1). *Die so gewonnenen n Lösungen $y_x^{(1)}$ $\left(= \eta_x^{(1)}\right)$, $y_x^{(2)}$, $y_x^{(3)}$, ..., $y_x^{(n)}$ bilden ein Fundamentalsystem der Differenzengleichung* (1). Denn bestünde zwischen denselben eine Relation

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)} = 0$$

mit „konstanten" Koeffizienten, so würde nach Division durch $y_x^{(1)} = \eta_x^{(1)}$ folgen:

$$\omega_1 + \omega_2 \sum \eta_x^{(2)} + \cdots + \omega_n \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)} \cdots \sum \eta_x^{(n)} = 0,$$

und wenn wir diese Gleichung „differentiieren"[2]):

$$\omega_2 \eta_x^{(2)} + \omega_3 \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)} + \cdots + \omega_n \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)} \cdots \sum \eta_x^{(n)} = 0;$$

nach Division durch $\eta_x^{(2)}$ und abermalige „Differentiation" ergibt sich

$$\omega_3 \eta_x^{(3)} + \cdots + \omega_n \eta_x^{(3)} \sum \eta_x^{(4)} \cdots \sum \eta_x^{(n)} = 0.$$

---

1) Vgl. 1. Kap., II, C.

2) D. h. wir bilden, wenn die Gleichung $G_x = 0$ lautet, $\Delta G_x = G_{x+1} - G_x = 0$; dabei ist zu beachten, daß die Symbole Δ und Σ inverse Operationen darstellen, welche, nacheinander angewendet, sich aufheben (vgl. 1. Kap., II, B).

Fährt man so fort, so erhält man schließlich

$$\omega_n \eta_x^{(n)} = 0,$$

also, da $\eta_x^{(n)} \neq 0$ ist, $\omega_n = 0$; folglich ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\omega_{n-1} + \omega_n \sum \eta_x^{(n)} = 0,$$

daß auch $\omega_{n-1} = 0$, und ebenso weiter, daß $\omega_{n-2} = 0, \ldots, \omega_2 = 0$, $\omega_1 = 0$ sein müßten. Die Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ bilden also ein Fundamentalsystem von (1).[1])

Zwischen den Determinanten der Fundamentalsysteme der so erhaltenen sukzessiven Differenzengleichungen $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0, \ldots$ besteht eine bemerkenswerte Beziehung: Wir hatten gefunden, daß in der Differenzengleichung (4)

$$q_x^{(n-1)} = \eta_{x+n}^{(1)}, \quad q_x^{(0)} = -p_x^{(0)} \eta_x^{(1)}$$

ist; daher ist, wenn die Determinante der Fundamentallösungen von (4) mit $\Delta_x^{(1)}$ bezeichnet wird, nach dem *Heymann*schen Satze[2]):

$$\frac{\Delta_{x+1}^{(1)}}{\Delta_x^{(1)}} = (-1)^{n-1} \frac{q_x^{(0)}}{q_x^{(n-1)}} = (-1)^n p_x^{(0)} \frac{\eta_x^{(1)}}{\eta_{x+n}^{(1)}},$$

und in Gleichung (1) nach demselben Satze:

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = (-1)^n p_x^{(0)};$$

durch Vergleichung der beiden daraus entspringenden Werte für $p_x^{(0)}$ ergibt sich

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{\eta_{x+n}^{(1)}}{\eta_x^{(1)}} \frac{\Delta_{x+1}^{(1)}}{\Delta_x^{(1)}};$$

in derselben Weise folgt

$$\frac{\Delta_{x+1}^{(1)}}{\Delta_x^{(1)}} = \frac{\eta_{x+n-1}^{(2)}}{\eta_x^{(2)}} \frac{\Delta_{x+1}^{(2)}}{\Delta_x^{(2)}}, \quad \frac{\Delta_{x+1}^{(2)}}{\Delta_x^{(2)}} = \frac{\eta_{x+n-2}^{(3)}}{\eta_x^{(3)}} \frac{\Delta_{x+1}^{(3)}}{\Delta_x^{(3)}}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_{x+1}^{(n-1)}}{\Delta_x^{(n-1)}} = \frac{\eta_{x+1}^{(n)}}{\eta_x^{(n)}};$$

also ist

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{\eta_{x+n}^{(1)}}{\eta_x^{(1)}} \frac{\eta_{x+n-1}^{(2)}}{\eta_x^{(2)}} \cdots \frac{\eta_{x+2}^{(n-1)}}{\eta_x^{(n-1)}} \frac{\eta_{x+1}^{(n)}}{\eta_x^{(n)}},$$

und daher

$$(6) \quad D_x \equiv D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \omega \prod_{r=0}^{n-1} \eta_{x+r}^{(1)} \cdot \prod_{r=0}^{n-2} \eta_{x+r}^{(2)} \cdots \prod_{r=0}^{1} \eta_{x+r}^{(n-1)} \cdot \eta_x^{(n)}.$$ [3])

---

1) *Guldberg*, **3.** 2) 2. Kap., III, Gl. (3). 3) *Wallenberg*, **6.**, Nr. 1

Ganz analog beweist man die allgemeinere Relation:

$$(7)\ D_x^{(k)} \equiv D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k)}\right) = \omega' \prod_{r=0}^{k-1} \eta_{x+r}^{(1)} \cdot \prod_{r=0}^{k-2} \eta_{x+r}^{(2)} \cdots \prod_{r=0}^{1} \eta_{x+r}^{(k-1)} \cdot \eta_x^{(k)};$$

darin bedeuten ω und ω' „Konstanten". Ein zweiter Beweis für diese Beziehungen ergibt sich unmittelbar aus der im 2. Kapitel, I, B aufgestellten Determinantenrelation (6), da die dort auftretenden Größen $y_x^{(k_1)}$ offenbar mit den $\eta_x^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ identisch sind.

Aus unseren obigen Auseinandersetzungen geht noch folgendes hervor: Wenn die Differenzengleichung (4), deren Koeffizienten rationale Funktionen von $p_x^{(0)}, p_x^{(2)}, \ldots, p_x^{(n-1)}, y_x^{(1)}, y_{x+2}^{(1)}, \ldots, y_{x+n}^{(1)}$ sind, die Fundamentallösungen $\eta_x^{(2_1)}, \ldots, \eta_x^{(2_{n-1})}$ besitzt, so bilden die Funktionen

$$y_x^{(1)},\ y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2_1)}, \ldots,\ y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2_{n-1})}$$

ein Fundamentalsystem von (1); denn aus einer Relation

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2_1)} + \cdots + \omega_n y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2_{n-1})} = 0$$

würde nach Division durch $y_x^{(1)}$ und „Differentiation" folgen:

$$\omega_2 \eta_x^{(2_1)} + \ldots + \omega_n \eta_x^{(2_{n-1})} = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. Kennt man also *eine* Lösung der Gleichung (1), so erhält man die übrigen durch Auflösung einer homogen linearen Differenzengleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und $n-1$ einfache Summationen.

Kennt man *zwei* linear unabhängige Lösungen der Gleichung (1), $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$, so ist $\eta_x^{(2)} = \Delta \dfrac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}$ eine von Null verschiedene Lösung der Gleichung (4), sodaß diese auf die Differenzengleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung (5) reduziert werden kann, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $q_x^{(0)}, q_x^{(2)}, \ldots, q_x^{(n-1)}, \eta_x^{(2)}, \eta_{x+2}^{(2)}, \ldots, \eta_{x+n-1}^{(2)}$ d. h. rationale Funktionen von $p_x^{(0)}, p_x^{(3)}, \ldots, p_x^{(n-1)}, y_x^{(1)}, \ldots, y_{x+n}^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_{x+n}^{(2)}$ sind. Besitzt dieselbe die Fundamentallösungen $\eta_x^{(3_1)}, \ldots, \eta_x^{(3_{n-2})}$, so bilden die Funktionen

$$y_x^{(1)},\ y_x^{(2)},\ y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3_1)}, \ldots,\ y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3_{n-2})} \quad \left(\eta_x^{(2)} = \Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}\right)$$

ein Fundamentalsystem von (1); denn aus einer Relation

$$\omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \omega_3 y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3_1)} + \cdots + \omega_n y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3_{n-2})} = 0$$

würde nach Division durch $y_x^{(1)}$ und Ausübung der Operation Δ, daraufolgender Division durch $\eta_x^{(2)} = \Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}$ und nochmaliger „Differentiation" folgen:

$$\omega_3 \eta_x^{(3_1)} + \cdots + \omega_n \eta_x^{(3_n - 2)} = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. — Kennt man also zwei Lösungen der Gleichung (1), so erhält man die übrigen durch Auflösung einer homogenen linearen Differenzengleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und $n-2$ zweifache Summationen. So weiter schließend erhält man folgenden Satz:[1]) *Kennt man k linear unabhängige Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(k)}$ einer homogenen linearen Differenzengleichung* (1), *so erhält man die übrigen $n-k$ Elemente eines Fundamentalsystems von* (1) *durch Auflösung einer homogenen linearen Differenzengleichung $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $p_x^{(0)}, p_x^{(k+1)}, \ldots, p_x^{(n-1)}; y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k)}; y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+1}^{(k)}; \ldots; y_{x+n}^{(1)}, \ldots, y_{x+n}^{(k)}$ sind, und durch $n-k$ k-fache Summationen. Kennt man insbesondere $n-1$ linear unabhängige Lösungen, so erhält man die n^{te} Lösung des Fundamentalsystems durch eine Quadratur und eine $(n-1)$-fache Summation.*

1. Beispiel. (W.)

Die Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_x + p_x^{(1)} y_{x+1} + y_{x+2} = 0$$

mit der Partikularlösung η_x geht durch die Substitution $y_x = \eta_x \sum u_x$ über in

$$Q(u_x) \equiv u_{x+1} - p_x^{(0)} \frac{\eta_x}{\eta_{x+2}} u_x = 0;$$

aus dieser ergibt sich

$$u_x = \omega \prod p_x^{(0)} \cdot \frac{1}{\eta_x \eta_{x+1}},$$

also

$$y_x = \omega \eta_x \sum \frac{\prod p_x^{(0)}}{\eta_x \eta_{x+1}},$$

in Übereinstimmung mit einem früheren Resultat.[2]) Der Ausdruck für y_x stellt übrigens die *allgemeine* Lösung von $P(y_x) = 0$ dar, da die Summe $\sum$ noch eine willkürliche „Konstante" enthält.

---

1) *W.* 2) 2. Kap., III, 1. Anwendung.

2. Beispiel. (W.)

Die Differenzengleichung dritter Ordnung

$$P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_x + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(2)} y_{x+2} + y_{x+3}$$

mit der Partikularlösung $y_x^{(1)} = \eta_x^{(1)}$ geht durch die $y_x = \eta_x^{(1)} \sum u_x$ über in die Gleichung zweiter Ordnung

$$Q(u_x) \equiv - p_x^{(0)} \eta_x^{(1)} u_x + (p_x^{(2)} \eta_{x+2}^{(1)} + \eta_{x+3}^{(1)}) u_{x+1} + \eta_{x+3}^{(1)}$$

Ist $\eta_x^{(2)}$ eine Lösung von $Q(u_x) = 0$, so ist $y_x^{(2)}$ zweite Lösung von $P(y_x) = 0$, und umgekehrt ist

$$\eta_x^{(2)} = \Delta \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}} = \frac{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}}$$

Durch die Substitution $u_x = \eta_x^{(2)} \sum v_x$ geht $Q(u_x)$ Gleichung erster Ordnung

$$R(v_x) \equiv v_{x+1} - p_x^{(0)} \frac{\eta_x^{(1)} \eta_x^{(2)}}{\eta_{x+3}^{(1)} \eta_{x+1}^{(2)}} v_x = 0,$$

oder in

$$v_{x+1} + p_x^{(0)} \frac{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}}{y_{x+2}^{(1)} y_{x+3}^{(2)} - y_{x+2}^{(2)} y_{x+3}^{(1)}} \cdots v_x$$

Die Lösung $\eta_x^{(3)}$ von $R(v_x) = 0$ lautet

$$\eta_x^{(3)} = \omega (-1)^x \prod p_x^{(0)} \cdots$$

und daher die dritte linear unabhängige Lösung von P

$$y_x^{(3)} = y_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \sum \eta_x^{(3)},$$

worin für $\eta_x^{(2)}$ und $\eta_x^{(3)}$ die oben angegebenen Ausdrücke und deren sukzessive Werte einzusetzen sind.

Für $D_x = D(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, y_x^{(3)})$ ergibt sich noch

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = -p_x^{(0)} \cdots$$

also

II. Vielfache Lösungen.[1])

Wenn

$$(1)\qquad P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_x + p_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + y_{x+n}$$

gesetzt wird, so war nach Nr. I dieses Kapitels:

$$(2)\quad P(y_x z_x) = P(y_x) z_x + P_1(y_x)\,\Delta z_x + P_2(y_x)\,\Delta^2 z_x + \cdots + P_n(y_x)\,\Delta^n z_x,$$

worin

$$(3)\quad P_k(y_x) \equiv \binom{k}{k} p_x^{(k)} y_{x+k} + \binom{k+1}{k} p_x^{(k+1)} y_{x+k+1} + \cdots + \binom{n}{k} y_{x+n}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

ist; insbesondere ist

$$P_{n-1}(y_x) \equiv p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + n y_{x+n}, \quad P_n(y_x) = y_{x+n} (\neq 0).$$

Setzt man in (2) $z_x = \binom{x}{r}$ und berücksichtigt die Formel[2]):

$$\Delta \binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}, \quad \text{also} \quad \Delta^s \binom{x}{r} = \binom{x}{r-s} \text{ und daher } \Delta^r \binom{x}{r} = 1,$$

$$\Delta^s \binom{x}{r} = 0, \text{ wenn } s > r,$$

so erhält man

$$(4)\ P\left(\binom{x}{r} y_x\right) = \binom{x}{r} P(y_x) + \binom{x}{r-1} P_1(y_x) + \cdots + x P_{r-1}(y_x) + P_r(y_x),$$

$$(r = 0, 1, \ldots, n-1);$$

insbesondere ergibt sich

$$P(x y_x) = x P(y_x) + P_1(y_x),$$

$$P\left(\frac{x(x-1)}{2} y_x\right) = \frac{x(x-1)}{2} P(y_x) + x P_1(y_x) + P_2(y_x), \quad \text{usf.}$$

Aus diesen Gleichungen kann man sukzessive $P_1(y_x)$, $P_2(y_x), \ldots,$ durch $P(y_x)$, $P(x y_x)$, $P\left(\binom{x}{2} y_x\right), \ldots,$ ausdrücken; z. B. ist

$$P_1(y_x) = P(x y_x) - x P(y_x),$$

sodaß $P_1(y_x)$ mit der von *Pincherle*[3]) so genannten „funktionalen Ableitung" von $P(y_x)$ übereinstimmt. Allgemeiner besteht zwischen zwei aufeinander folgenden „Ableitungen" $P_k(y_x)$ die Rekursionsformel

$$(5)\qquad P_k(y_x) = \frac{1}{k}\left[P_{k-1}(x y_x) - (x + k - 1)\, P_{k-1}(y_x)\right],$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ P_0 = P),$$

wie man leicht verifiziert.[4])

---

1) *Guldberg*, **1.**, **3.**, **11.**; W.
2) Siehe z. B. *Seliwanoff*, **2.**, S. 3.
3) Math. Ann. **49**, 378 (1897). 4) W.

Ist nun für $y_x = \eta_x (\neq 0)$

$$P(\eta_x) = 0, \quad P_1(\eta_x) = 0, \ldots, P_{\lambda-1}(\eta_x) = 0 \; (\lambda < n),$$

so folgt aus den Gleichungen (4) für $r = 1, 2, \ldots \lambda - 1$ sukzessive:

$$P(x\eta_x) = 0, \quad P\left(\binom{x}{2}\eta_x\right) = 0, \ldots, \quad P\left(\binom{x}{\lambda-1}\eta_x\right) = 0 \text{ (und umgekehrt)};$$

d. h. die Gleichung $P(y_x) = 0$ besitzt die Lösungen

$$\eta_x, \; x\eta_x, \; \binom{x}{2}\eta_x, \ldots, \binom{x}{\lambda-1}\eta_x,$$

oder auch, durch geeignete homogene lineare Verbindungen derselben mit konstanten Koeffizienten, die Lösungen

$$\eta_x, \; x\eta_x, \; x^2\eta_x, \ldots, x^{\lambda-1}\eta_x; \tag{6}$$

dieselben sind linear unabhängig, da eine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten

$$\omega_1\eta_x + \omega_2 x\eta_x + \omega_3 x^2\eta_x + \cdots + \omega_\lambda x^{\lambda-1}\eta_x = 0$$

wegen $\eta_x \neq 0$

$$\omega_1 + \omega_2 x + \omega_3 x^2 + \cdots + \omega_\lambda x^{\lambda-1} = 0$$

für jeden Wert von x, z. B. für x, $x+1$, $x+2, \ldots$, also

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ldots, \quad \omega_\lambda = 0$$

nach sich zieht.

Eine solche Lösung η_x heißt eine *λ-fache Lösung* der Gleichung $P(y_x) = 0$; sie repräsentiert λ verschiedene Lösungen, da die Funktionen (6) wegen ihrer linearen Unabhängigkeit als λ Elemente zu dem Aufbau eines Fundamentalsystems von (1) benutzt werden können.[1])

Setzt man in der identischen Gleichung (5) $x^{\nu-1}y_x$ an Stelle von y_x, so erhält man:

$$P_k(x^{\nu-1}y_x) = \frac{1}{k}\left[P_{k-1}(x^\nu y_x) - (x+k-1)P_{k-1}(x^{\nu-1}y_x)\right],$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n; \; P_0 = P).$$

Aus $P_{k-1}(\eta_x) = 0$, $P_{k-1}(x\eta_x) = 0$, $P_{k-1}(x^2\eta_x) = 0, \ldots, P_{k-1}(x^\varrho\eta_x) = 0$ folgt daher sukzessive:

$$P_k(\eta_x) = 0, \quad P_k(x\eta_x) = 0, \ldots, \quad P_k(x^{\varrho-1}\eta_x) = 0.$$

Das heißt: *Eine $(\varrho+1)$-fache Lösung von $P_{k-1}(y_x) = 0$ ist ϱ-fache Lösung von $P_k(y_x) = 0$.* Ist z. B. η_x eine λ-fache Lösung von $P(y_x) = 0$, so ist sie $(\lambda-1)$-fache Lösung von $P_1(y_x) = 0$, $(\lambda-2)$-fache

1) Vgl. 2. Kap., II, B.

Lösung von $P_2(y_x) = 0, \ldots,$ 2-fache Lösung von $P_{\lambda-2}(y_x) = 0$ und endlich 1-fache Lösung von $P_{\lambda-1}(y_x) = 0$.

Besitzt die Gleichung $P(y_x) = 0$ *eine* und *nur eine* λ-fache Lösung η_x, so besitzt nach obigem die Gleichung $P_1(y_x) = 0$ dieselbe Lösung $(\lambda - 1)$-fach, d. h. die Gleichung $P(y_x) = 0$ besitzt die Lösungen

$$\eta_x, \quad x\eta_x, \quad x^2\eta_x, \ldots, \quad x^{\lambda-1}\eta_x,$$

und die Gleichung $P_1(y_x) = 0$ die Lösungen

$$\eta_x, \quad x\eta_x, \quad x^2\eta_x, \ldots, \quad x^{\lambda-2}\eta_x;$$

beide haben also die gemeinsamen Lösungen

$$\eta_x, \quad x\eta_x, \quad x^2\eta_x, \ldots, \quad x^{\lambda-2}\eta_x \tag{7}$$

und *keine anderen* gemeinschaftlichen Lösungen. Ist daher T der größte gemeinsame (symbolische) Teiler[1]) von P und P_1, so besitzt die homogene lineare Differenzengleichung $T(y_x) = 0$ nur die Lösungen (7), ist also eine Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$T(y_x) \equiv t_x^{(0)} y_x + t_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + t_x^{(\lambda-2)} y_{x+\lambda-2} + y_{x+\lambda-1} = 0, \tag{8}$$

deren Koeffizienten nach Früherem rationale Funktionen von

$$p_x^{(0)}, \ldots, p_x^{(n-1)}$$

und deren sukzessiven Werten sind. Die „abgeleiteten" Differenzengleichungen

$$T_1(y_x) = 0, \; T_2(y_x) = 0, \; \ldots, \; T_{\lambda-2}(y_x) = 0$$

besitzen sämtlich die Lösung η_x; insbesondere ist

$$T_{\lambda-2}(y_x) \equiv t_x^{(\lambda-2)} y_{x+\lambda-2} + (\lambda-1) y_{x+\lambda-1},$$

also η_x eine Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung

$$(\lambda-1) y_{x+1} + t_{x-\lambda+2}^{(\lambda-2)} y_x = 0,$$

aus welcher sich

$$\eta_x = \omega \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^x \prod t_{x-\lambda+2}^{(\lambda-2)}$$

ergibt[2]). Ist aber η_x bekannt, so kennen wir auch die λ linear unabhängigen Lösungen

$$\eta_x, \; x\eta_x, \; \ldots, \; x^{\lambda-1}\eta_x$$

der Gleichung $P(y_x) = 0$ und können daher nach Nr. I dieses Kapitels diese Gleichung auf eine solche $(n - \lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung reduzieren.

---

1) 2. Kap., VI. 2) Vgl. 1. Kap., I u. II, C.

Wir haben also den Satz[1]): *Besitzt eine homogene lineare renzengleichung n^{ter} Ordnung eine und nur eine λ-fache Lösung, so man diese durch einfache Quadratur finden; diese Differenzenglei läßt sich alsdann von ihrer mehrfachen Lösung befreien und au homogene lineare Differenzengleichung $(n-\lambda)^{ter}$ Ordnung reduzier*

III. Zerlegung eines homogenen linearen Differenzenausdr in homogene lineare Differenzenausdrücke erster Ordnu

Setzt man

$$u_x^{(1)} = \eta_x^{(1)}, \quad u_x^{(2)} = \eta_{x+1}^{(1)} \eta_x^{(2)}, \quad u_x^{(3)} = \eta_{x+2}^{(1)} \eta_{x+1}^{(2)} \eta_x^{(3)}, \quad \ldots,$$
$$u_x^{(n)} = \eta_{x+n-1}^{(1)} \eta_{x+n-2}^{(2)} \ldots \eta_x^{(n)},$$

worin $\eta_x^{(1)}, \eta_x^{(2)}, \ldots, \eta_x^{(n)}$ die in Nr. I dieses Kapitels definierten tionen sind, so lassen sich die Lösungen der Gleichung $P(y_x) =$ folgender Form darstellen:

$$y_x^{(1)} = u_x^{(1)}, \quad y_x^{(2)} = u_x^{(1)} \sum \frac{u_x^{(2)}}{u_{x+1}^{(1)}}, \quad y_x^{(3)} = u_x^{(1)} \sum \frac{u_x^{(2)}}{u_{x+1}^{(1)}} \sum \frac{u_x^{(3)}}{u_{x+1}^{(2)}}, \quad \ldots$$
$$y_x^{(n)} = u_x^{(1)} \sum \frac{u_x^{(2)}}{u_{x+1}^{(1)}} \cdots \sum \frac{u_x^{(n)}}{u_{x+1}^{(n-1)}}.$$

Ferner war nach Nr. I dieses Kapitels, Gl. (6) u. (7):

$$D_x \equiv D_x^{(n)} \equiv D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \omega\, u_x^{(1)} u_x^{(2)} \ldots u_x^{(n)},$$
$$D_x^{(k)} \equiv D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k)}\right) = \omega' u_x^{(1)} u_x^{(2)} \ldots u_x^{(k)},$$

also bei geeigneter Normierung der Lösungen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$, die j einer beliebigen „Konstanten" multipliziert werden können:

$$(1) \qquad u_x^{(k)} = \frac{D_x^{(k)}}{D_x^{(k-1)}}, \quad \left(k = 1, 2, \ldots, n;\; D_x^{(1)} = y_x^{(1)},\; D_x^{(0)} = 1\right).$$

Jedes $u_x^{(k)}$ genügt einer homogenen linearen Differenzengleichung e Ordnung

$$A_k(y_x) \equiv u_{x+1}^{(k)} \Delta \frac{y_x}{u_x^{(k)}} \equiv y_{x+1} - \frac{u_{x+1}^{(k)}}{u_x^{(k)}} y_x = 0.$$

1) *Guldberg*, **5.**, S. 9—11.

2) *Pincherle*, **6.** u. **9.**, §§ 286—290; *Bortolotti*, **3.**; *W.*

Die Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ wird durch die einzige Lösung $y_x = u_x^{(1)}$ der Differenzengleichung

$$A_1(y_x) \equiv y_{x+1} - \frac{u_{x+1}^{(1)}}{u_x^{(1)}} y_x = 0$$

befriedigt[1]); daher ist nach dem 2. Kap., V:

$$P = B_1 A_1,$$

worin B_1 einen homogenen linearen Differenzenausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Da $A_1(y_x)$ nur für $y_x = y_x^{(1)} \left(= u_x^{(1)}\right)$ verschwindet, so ist

$$A_1\left(y_x^{(k)}\right) \neq 0, \ (k = 2, 3, \ldots, n);$$

und da

$$P\left(y_x^{(k)}\right) = B_1 A_1 \left(y_x^{(k)}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, so besitzt die homogene lineare Differenzengleichung $B_1(y_x) = 0$ die $n-1$ von Null verschiedenen Lösungen $A_1\left(y_x^{(k)}\right)$, $(k = 2, 3, \ldots, n)$, d. h. die Lösungen

$$u_{x+1}^{(1)} \Delta \frac{y_x^{(2)}}{u_x^{(1)}}, \quad u_{x+1}^{(1)} \Delta \frac{y_x^{(3)}}{u_x^{(1)}}, \quad \ldots, \quad u_{x+1}^{(1)} \Delta \frac{y_x^{(n)}}{u_x^{(1)}},$$

oder nach Nr. I dieses Kapitels:

$$u_x^{(2)}, \quad u_x^{(2)} \sum \frac{u_x^{(3)}}{u_{x+1}^{(2)}}, \quad \ldots, \quad u_x^{(2)} \sum \frac{u_x^{(3)}}{u_{x+1}^{(2)}} \cdots \sum \frac{u_x^{(n)}}{u_x^{(n-1)}}.$$

Daher folgt in derselben Weise wie oben

$$B_1 = B_2 A_2,$$

worin B_2 ein homogener linearer Differenzenausdruck $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und die Gleichung $B_2(y_x) = 0$ besitzt die $n-2$ von Null verschiedenen Lösungen

$$u_x^{(3)}, \quad u_x^{(3)} \sum \frac{u_x^{(4)}}{u_{x+1}^{(3)}}, \quad \ldots, \quad u_x^{(3)} \sum \frac{u_x^{(4)}}{u_{x+1}^{(3)}} \cdots \sum \frac{u_x^{(n)}}{u_{x+1}^{(n-1)}}.$$

Wir haben also

$$P = B_1 A_1 = B_2 A_2 A_1;$$

fährt man so fort, so erhält man schließlich

$$P = A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1, \tag{2}$$

da wegen $p_x^{(n)} = 1$ auch $B_n = 1$ sein muß. *Hiermit ist der homogene*

---

1) Lösungen, die sich nur durch eine „Konstante" unterscheiden, werden nicht als voneinander verschieden angesehen; die triviale Lösung $y_x = 0$ wird stets außer acht gelassen.

lineare Differenzenausdruck n^{ter} Ordnung in n homogene lineare Differenzenausdrücke erster Ordnung zerlegt. Ausführlicher lautet die Zerlegung:

$$P(y_x) = u_{x+1}^{(n)} \Delta \frac{u_{x+1}^{(n-1)}}{u_x^{(n)}} \cdots \Delta \frac{u_{x+1}^{(2)}}{u_x^{(3)}} \Delta \frac{u_{x+1}^{(1)}}{u_x^{(2)}} \Delta \frac{y_x}{u_x^{(1)}}, \tag{3}$$ [1]

oder

$$\frac{1}{u_{x+1}^{(n)}} P(y_x) = \Delta \frac{1}{\eta_x^{(n)}} \Delta \frac{1}{\eta_x^{(n-1)}} \cdots \Delta \frac{1}{\eta_x^{(3)}} \Delta \frac{1}{\eta_x^{(2)}} \Delta \frac{y_x}{\eta_x^{(1)}}, \tag{3a}$$

oder endlich mit Rücksicht auf (1)

$$P(y_x) = \frac{D_{x+1}^{(n)}}{D_{x+1}^{(n-1)}} \Delta \frac{D_x^{(n-1)} D_{x+1}^{(n-1)}}{D_x^{(n)} D_{x+1}^{(n-2)}} \cdots \Delta \frac{D_x^{(2)} D_{x+1}^{(2)}}{D_x^{(3)} D_{x+1}^{(1)}} \Delta \frac{D_x^{(1)} D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(2)} D_{x+1}^{(0)}} \Delta \frac{y_x}{y_x^{(1)}}. \tag{4}$$

Diese Zerlegung ergibt sich auch als Folge der im 2. Kap., I, B aufgestellten allgemeinen Determinantenrelation (5).[2] Aus derselben erhält man nämlich insbesondere:

$$D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}; y_x^{(k)}, y_x\right)$$
$$= \frac{D\left(D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}; y_x^{(k)}\right),\ D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}; y_x\right)\right)}{D\left(y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+1}^{(k-1)}, y_{x+1}^{(k+1)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)}\right)},$$

oder, da

$$D(u_x, v_x) = u_x u_{x+1} \Delta \frac{v_x}{u_x}$$

ist:

$$\frac{D\left(y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+1}^{(k-1)}, y_{x+1}^{(k+1)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)}\right) D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_{x+1}^{(1)}, y_{x+1}^{(2)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)}\right) D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)} \tag{5}$$
$$= -\Delta \frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}.$$

Daraus folgt für $k = n$:

$$\frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)} = -\frac{D\left(y_{x+1}^{(1)}, y_{x+1}^{(2)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)}\right)}{D\left(y_{x+1}^{(1)}, y_{x+1}^{(2)}, \ldots, y_{x+1}^{(n-1)}\right)} \Delta \frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n-1)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)},$$

oder

$$\frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D_x^{(n)}} = -\frac{D_{x+1}^{(n)}}{D_{x+1}^{(n-1)}} \Delta \frac{D_x^{(n-1)}}{D_x^{(n)}} \frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n-1)}\right)}{D_x^{(n-1)}}; \tag{6}$$

durch sukzessive Anwendung der Rekursionsformel (6) ergibt sich aber mit Rücksicht auf Gl. (5) des 2. Kap., III die Zerlegung (4).

---

1) *W.*

2) *Bortolotti,* **3.** (Die Arbeit enthält einen Fehler, der hier richtiggestellt ist.)

Hat man einmal die Möglichkeit der Zerlegung eines homogenen linearen Differenzenausdruckes n^{ter} Ordnung $P(y_x)$ in solche erster Ordnung $A_k(y_x)$ eingesehen:

$$P = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1,$$

worin

$$A_k \equiv y_{x+1} - \alpha_k y_x$$

ist, so kann man die α_k auch auf folgende Weise sehr einfach durch das Fundamentalsystem $y_x^{(1)}, \dots, y_x^{(n)}$ ausdrücken[1]): Es sei

$$P_k = A_k A_{k-1} \dots A_2 A_1,$$

und die Indizes der Fundamentalintegrale seien so gewählt, daß die Gleichung $P_k(y_x) = 0$ die Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \dots, y_x^{(k)}$ besitzt. Der Koeffizient von y_{x+k} in P_k ist 1, der Koeffizient von y_x gleich dem Produkt $(-1)^k \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$[2]); daher ergibt sich aus dem *Heymann*-schen Satze[3]):

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = \frac{D_{x+1}^{(k)}}{D_x^{(k)}};$$

in derselben Weise ergibt sich durch Betrachtung von P_{k-1}:

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} = \frac{D_{x+1}^{(k-1)}}{D_x^{(k-1)}};$$

folglich ist

$$\alpha_k = \frac{D_{x+1}^{(k)}}{D_x^{(k)}} : \frac{D_{x+1}^{(k-1)}}{D_x^{(k-1)}}$$

in Übereinstimmung mit den oben gefundenen Resultaten, da

$$\alpha_k = \frac{u_{x+1}^{(k)}}{u_x^{(k)}}$$

ist.

Beispiel: Die linke Seite der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$P(y_x) \equiv y_{x+2} + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(0)} y_x = 0$$

mit den Fundamentallösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}$ läßt folgende Zerlegung in homogene lineare Differenzenausdrücke erster Ordnung zu:

$$P(y_x) = \frac{D_{x+1}^{(2)}}{D_{x+1}^{(1)}} \Delta \frac{D_x^{(1)} D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(2)} D_{x+1}^{(0)}} \Delta \frac{y_x}{y_x^{(1)}},$$

---

1) *Pincherle* (u. *Amaldi*), **9.**, Kap. X, § 290.
2) Vgl. 2. Kap., V. 3) 2. Kap., III, Gl. (3).

oder ausführlicher:

$$P(y_x) = \frac{y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+2}^{(1)}}{y_{x+1}^{(1)}} \Delta \frac{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}} \Delta \frac{y_x}{y_x^{(1)}}.$$

IV. Multiplikatoren. Adjungierte Differenzengleichung.[1]

Unter dem *Multiplikator* einer homogenen linearen Differenzengleichung

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0\ ^{2)}$$

versteht man eine Funktion M_x derart, daß das Produkt $M_x P(y_x)$ eine vollständige Differenz wird:

$$M_x P(y_x) = \Delta Q(y_x).$$

Die Existenz solcher Multiplikatoren ergibt sich schon z. B. aus der Zerlegungsformel (3) bzw. (4) der vorigen Nr. III; denn aus dieser geht unmittelbar hervor, daß

$$\frac{1}{u_{x+1}^{(n)}} = \frac{D_{x+1}^{(n-1)}}{D_{x+1}^{(n)}}$$

ein Multiplikator von $P(y_x)$ ist. Allgemeiner folgt aus Gl. (5) der vorigen Nr. III mit Rücksicht auf Gl. (7) des 2. Kap., I, C und Gl. (5) des 2. Kap., III, wenn man noch

$$(-1)^{k-1} \frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)} = Q_k(y_x)$$

setzt:

$$z_{x+1}^{(k)} P(y_x) = \Delta Q_k(y_x), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\ ^{3)};$$

die „adjungierten" Funktionen $z_{x+1}^{(k)}$ *sind also Multiplikatoren von* (1).

Wir wollen dieses Resultat noch auf eine andere elementare Weise ableiten, die uns zugleich einen tieferen Einblick in die Natur der Multiplikatoren gestatten wird[4]): Ist $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (1), y_x ihre allgemeine Lösung, so besteht das Gleichungssystem

$$(2) \quad y_{x+k} = \omega_1 y_{x+k}^{(1)} + \omega_2 y_{x+k}^{(2)} + \cdots + \omega_n y_{x+k}^{(n)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

---

1) *Pincherle,* **2.** u. **9.**, Kap. X, §§ 298—306; *Bortolotti,* **2.** u. **3.**; *Wallenberg,* **2.** u. **3.**

2) Die neue Indexbezeichnung der Koeffizienten ist für das Folgende vorteilhafter.

3) *Bortolotti,* **2.** 4) *Wallenberg,* **2.**

worin die ω_i „Konstanten" sind. Löst man diese Gleichungen nach den „Konstanten" ω_i auf, so erhält man:

$$(3) \qquad \omega_k = \frac{D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}$$
$$= z_x^{(1k)} y_x + z_x^{(2k)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(nk)} y_{x+n-1} \equiv Q_k(y_x),$$

worin wie früher (2. Kap., I, C)

$$z_x^{(ik)} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_{x+i-1}^{(k)}}$$

und

$$D \equiv D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \left|y_{x+i-1}^{(k)}\right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist; wegen der linearen Unabhängigkeit der Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ist $D \neq 0$.

Jede der Gleichungen (3) stellt eine „erste Lösung" von (1) dar, d. h. die Ausdrücke $Q_k(y_x)$ nehmen für jede Lösung von (1) einen „konstanten" Wert an; insbesondere ist, wie man sofort aus (3) ersieht:

$$Q_k\left(y_x^{(i)}\right) = 0, \text{ wenn } i \neq k; \quad Q_k\left(y_x^{(k)}\right) = 1.$$

Daher muß die Differenz $\Delta Q_k(y_x) = Q_k(y_{x+1}) - Q_k(y_x)$ für jede Lösung von (1) verschwinden, also nach dem 2. Kap., III mit $P(y_x)$ bis auf einen Faktor übereinstimmen, der sich durch Vergleichung der Koeffizienten von y_{x+n} in $\Delta Q_k(y_k)$ und $P(y_x)$ gleich $z_{x+1}^{(k)}$ $\left(\equiv z_{x+1}^{(nk)}\right)$ ergibt.

Folglich ist für *jedes* y_x:

$$(4) \qquad \Delta Q_k(y_x) = z_{x+1}^{(k)} P(y_x),$$

oder ausführlicher:

$$(4a) \qquad \Delta\left(z_x^{(1k)} y_x + z_x^{(2k)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(k)} y_{x+n-1}\right)$$
$$= z_{x+1}^{(k)}\left(y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x\right),$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Hieraus erkennt man in der Tat, daß die Funktionen

$$z_{x+1}^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo

$$z_x^{(k)} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_{x+n-1}^{(k)}}$$

ist, Multiplikatoren von (1) sind; die lineare Unabhängigkeit dieser „adjungierten" Funktionen ist bereits im 2. Kap., I, C bewiesen worden.

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}$ auf beiden Seiten von (4a) erhält man

$$
(5)\quad \begin{cases}
\phantom{z_{x+1}^{(1k)}} - z_x^{(1k)} = p_x^{(n)} z_{x+1}^{(k)}, \\
z_{x+1}^{(1k)} - z_x^{(2k)} = p_x^{(n-1)} z_{x+1}^{(k)}, \\
z_{x+1}^{(2k)} - z_x^{(3k)} = p_x^{(n-2)} z_{x+1}^{(k)}, \quad (k=1, 2, \ldots, n). \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
z_{x+1}^{(n-2k)} - z_x^{(n-1k)} = p_x^{(2)} z_{x+1}^{(k)}, \\
z_{x+1}^{(n-1k)} - z_x^{(k)} = p_x^{(1)} z_{x+1}^{(k)}.
\end{cases}
$$

Daraus ergibt sich für die $z_x^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ die zu (1) „*adjungierte Differenzengleichung*“:

$$
(6)\quad \overline{P}(z_x) \equiv z_x + p_x^{(1)} z_{x+1} + p_{x+1}^{(2)} z_{x+2} + \cdots + p_{x+n-2}^{(n-1)} z_{x+n-1} + p_{x+n-1}^{(n)} z_{x+n} = 0.
$$

Die anderen $z_x^{(ik)}$ sind, wie ebenfalls aus (5) hervorgeht, mit den $z_x^{(k)}$ durch die Gleichungen

$$
(7)\quad z_x^{(n-sk)} = z_{x-s}^{(k)} + p_{x-s}^{(1)} z_{x-s+1}^{(k)} + \cdots + p_{x-1}^{(s)} z_x^{(k)}
\qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 1, 1, \ldots, n \end{pmatrix}
$$

verbunden; man sagt: „Die Funktionen $z_x^{(n-sk)}$ gehören mit den Funktionen $z_x^{(k)}$ *zur selben Art*, und ebenso die homogenen linearen Differenzengleichungen, denen sie genügen.“[1])

Setzt man in (4a) für $z_x^{(1k)}, z_x^{(2k)}, \ldots, z_x^{(n-1k)}$ ihre Ausdrücke durch $z_x^{(k)}$ nach (7) ein, so entsteht auf der linken Seite von (4a) unter dem Zeichen Δ der bilineare Differenzenausdruck $P\left(y_x, z_x^{(k)}\right)$, wo

$$
\begin{aligned}
P(y_x, z_x) \equiv z_x y_{x+n-1} &+ \left(z_{x-1} + p_{x-1}^{(1)} z_x\right) y_{x+n-2} + \left(z_{x-2} + p_{x-2}^{(1)} z_{x-1} + p_{x-1}^{(2)} z_x\right) y_{x+n-3} \\
&+ \cdots + \left(z_{x-n+2} + p_{x-n+2}^{(1)} z_{x-n+3} + \cdots + p_{x-1}^{(n-2)} z_x\right) y_{x+1} \\
&+ \left(z_{x-n+1} + p_{x-n+1}^{(1)} z_{x-n+2} + \cdots + p_{x-1}^{(n-1)} z_x\right) y_x,
\end{aligned}
$$

oder

$$
(8)\quad P(y_x, z_x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} y_{x+k} \sum_{r=0}^{n-k-1} p_{x-r-1}^{(n-k-r-1)} z_{x-r}, \quad \left(p_x^{(0)} = 1\right),
$$

ist; es wird dann

$$
Q_k(y_x) = P\left(y_x, z_x^{(k)}\right).
$$

---

1) Vgl. 4. Kap., III.

Man kann nun für lineare Differenzengleichungen das Analogon der aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannten „*Lagrange*schen Beziehung“[1]) nach einer ähnlichen Methode ableiten, wie sie *Frobenius*[2]) für den Beweis dieser Relation angewandt hat: Der Ausdruck

$$\Delta P(y_x, z_x) - z_{x+1} P(y_x)$$

verschwindet nach (4) für $z_x = z_x^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, also für n nach früherem linear unabhängige Lösungen der Gleichung $\overline{P}(z_x) = 0$; dieser Ausdruck muß daher nach dem 2. Kap., III, mit $\overline{P}(z_{x-n+1})$[3]) bis auf einen Faktor übereinstimmen, der sich durch Vergleichung der Koeffizienten von z_{x-n+1} gleich $-y_x$ ergibt; es besteht also die *identische* Gleichung

$$\Delta P(y_x, z_x) - z_{x+1} P(y_x) = -y_x \overline{P}(z_{x-n+1}),$$

oder

$$z_{x+1} P(y_x) - y_x \overline{P}(z_{x-n+1}) = \Delta P(y_x, z_x).$$

Setzt man noch

$$z_{x+1} = u_x, \quad \overline{P}(z_{x-n+1}) = P'(z_{x+1}) \equiv P'(u_x),$$

so nimmt die „adjungierte Differenzengleichung“ (6) die Form an:

$$P'(u_x) \equiv u_{x-n} + p_{x-n+1}^{(1)} u_{x-n+1} + \cdots + p_{x-1}^{(n-1)} u_{x-1} + p_x^{(n)} u_x = 0,$$ [4])

oder kürzer:

$$(9) \qquad P'(u_x) \equiv u_{x-n} + (p^{(1)}u)_{x-n+1} + \cdots + (p^{(n-1)}u)_{x-1} + (p^{(n)}u)_x = 0;$$

sie besitzt die Fundamentallösungen $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(n)}$, wo

$$u_x^{(k)} = z_{x+1}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Setzt man ferner

$$P(y_x, z_x) \equiv P(y_x, u_{x-1}) = Q(y_x, u_x),$$

sodaß

$$Q(y_x, u_x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{x+k} \sum_{r=0}^{n-k-1} (p^{(r)}u)_{x-n+k+r}$$

wird, so lautet die oben gefundene Relation:

$$(10) \qquad u_x P(y_x) - y_x P'(u_x) = \Delta Q(y_x, u_x).$$ [5])

1) *Lagrange,* Miscell. Taurin., **3.**, 179.

2) Journ. für die r. u. a. Math. **76**, 260 (1873).

3) $P(z_{x-n+1})$ bedeutet, daß in $\overline{P}(z_x)$ *überall* $x - n + 1$ an Stelle von x gesetzt wird.

4) *Pincherle,* **2.**; er nennt sie die „inverse“ Gleichung.

5) *Bortolotti* (**3.**) muß infolge des bereits erwähnten Fehlers diese Relation auf den Fall $p_x^{(n)} = 1$ beschränken; aus den obigen Entwickelungen (*W.*, **2.**) geht hervor, daß diese Beschränkung unnötig ist.

Dies ist das Analogon der *Lagrange*schen Beziehung; *aus ihr folgt sofort, daß umgekehrt die Lösungen von $P(y_x) = 0$ Multiplikatoren von $P'(u_x)$ sind.*

Die durch die Gleichung (10) ausgedrückte Eigenschaft des adjungierten Differenzenausdruckes $P'(u_x)$ ist für diesen *charakteristisch*: es sei nämlich $R(u_x)$ ein zweiter homogener linearer Differenzenausdruck derart, daß

$$u_x P(y_x) - y_x R(u_x) = \Delta S(y_x, u_x)$$

ist, so folgt durch Subtraktion von (10):

$$y_x(R(u_x) - P'(u_x)) = \Delta(Q - S);$$

es würde also die Differenz Δ einer Funktion von $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}$ eine Funktion von y_x allein sein, was unmöglich ist; es muß also $R(u_x) = P'(u_x)$ (und $S = Q$) sein.

Wir können die Multiplikatoren endlich noch auf eine dritte Art herleiten:[1]) Es sei

$$S_k(y_x) \equiv y_{x+n-1} + s_x^{(1k)} y_{x+n-2} + \cdots + s_x^{(n-1k)} y_x = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

diejenige homogene lineare Differenzengleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit (1) die Lösungen

$$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(k-1)} y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}$$

gemeinsam hat. Dann muß nach dem 2. Kap., V:

$$P(y_x) = R_k S_k(y_x)$$

sein, worin R_k einen homogenen linearen Differenzenausdruck erster Ordnung:

$$R_k(y_x) \equiv y_{x+1} + r_x^{(k)} y_x$$

bedeutet. Es ist also

$$P(y_x) = S_k(y_{x+1}) + r_x^{(k)} S_k(y_x),\text{[2])}$$

und daher, da $P\left(y_x^{(k)}\right) = 0$ ist:

$$0 = S_k\left(y_{x+1}^{(k)}\right) + r_x^{(k)} S_k\left(y_x^{(k)}\right),$$

d. h.

$$r_x^{(k)} = -\frac{S_k\left(y_{x+1}^{(k)}\right)}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)};$$

folglich

$$\frac{P(y_x)}{S_k\left(y_{x+1}^{(k)}\right)} = \frac{S_k(y_{x+1})}{S_k\left(y_{x+1}^{(k)}\right)} - \frac{S_k(y_x)}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)} = \Delta \frac{S_k(y_x)}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)}.$$

---

1) *Wallenberg*, **3.**

2) $S_k(y_{x+1})$ bedeutet wieder, daß in $S_k(y_x)$ *überall* $x+1$ an Stelle von x gesetzt wird.

Es ist also $S_k^{-1}\left(y_{x+1}^{(k)}\right)$ *ein Multiplikator von* $P(y_x)$ und

$$S_k(y_x) = \omega_k S_k\left(y_x^{(k)}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

eine erste „Lösung" von $P(y_x) = 0$; und zwar ist insbesondere für $y_x = y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ die willkürliche „Konstante" $\omega_k = 0$, für $y_x = y_x^{(k)}$ dagegen $\omega_k = 1$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß diese Multiplikatoren mit den oben gefundenen identisch sind; es ist nämlich nach Gl. (5) des 2. Kap., III:

$$S_k(y_x) = (-1)^{n-1}\frac{D\left(y_x, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)},$$

also nach Gl. (7) des 2. Kap., I, C:

$$S_k\left(y_x^{(k)}\right) = (-1)^{n+k}\frac{D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)}{D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(k-1)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right)} = \frac{1}{z_x^{(k)}},$$

d. h. in der Tat

$$S_k^{-1}\left(y_{x+1}^{(k)}\right) = u_x^{(k)} \left(= z_{x+1}^{(k)}\right).$$

Daher ist ferner

$$z_x^{(k)} S_k(y_x) = \frac{S_k(y_x)}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)} = Q_k(y_x),$$

und folglich

$$s_x^{(n-i_k)} = \frac{z_x^{(i_k)}}{z_x^{(k)}}.$$

Endlich ergibt sich für den bilinearen Differenzenausdruck (8):

$$P\left(y_x, z_x^{(k)}\right) = Q_k(y_x) = \frac{S_k(y_x)}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)};$$

daher wird nach obigem $P\left(y_x, z_x^{(k)}\right)$ gleich einer „Konstanten", sobald für y_x irgend eine Lösung von (1) gesetzt wird, was sich übrigens auch aus Gleichung (4) oder aus dem Analogon der *Lagrange*schen Relation ergibt, da dann aus dieser $\Delta P\left(y_x, z_x^{(k)}\right) = 0$ folgt; insbesondere ist:

$$P\left(y_x^{(i)}, z_x^{(k)}\right) = \delta_{i_k} \quad \left(\begin{matrix} i, k = 1, 2, \ldots, n; \\ \delta_{i_k} = 0 \text{ für } i \neq k, \ \delta_{k_k} = 1 \end{matrix}\right).$$

Es sei ferner

$$T_k(u_x) \equiv u_{x-n+1} + t_x^{(1k)} u_{x-n+2} + \cdots + t_x^{(n-1k)} u_x = 0$$

diejenige Differenzengleichung, welche mit der Adjungierten (9) die Lösungen $u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(k-1)}, u_x^{(k+1)}, \ldots, u_x^{(n)}$ gemeinsam hat; dann muß wieder

$$P'(u_x) = L_k T_k(u_x)$$

sein, worin

$$L_k(u_x) \equiv u_{x-1} + l_x^{(k)} u_x$$

ist; also

$$P'(u_x) = T_k(u_{x-1}) + l_x^{(k)} T_k(u_x),\ ^{1)}$$

und da

$$P'\left(u_x^{(k)}\right) = T_k\left(u_{x-1}^{(k)}\right) + l_x^{(k)} T_k\left(u_x^{(k)}\right) = 0$$

ist:

$$l_x^{(k)} = -\frac{T_k\left(u_{x-1}^{(k)}\right)}{T_k\left(u_x^{(k)}\right)};$$

folglich:

$$-\frac{P'(u_x)}{T_k\left(u_{x-1}^{(k)}\right)} = -\frac{T_k(u_{x-1})}{T_k\left(u_{x-1}^{(k)}\right)} + \frac{T_k(u_x)}{T_k\left(u_x^{(k)}\right)} = \Delta \frac{T_k(u_{x-1})}{T_k\left(u_{x-1}^{(k)}\right)}.$$

Es ist also $-T_k^{-1}\left(u_{x-1}^{(k)}\right)$ *ein Multiplikator der adjungierten Gleichung* $P'(u_x) = 0$. Nach dem 2. Kap., III (Analogon der Gl. (5)) folgt wieder

$$T_k(z_x) = (-1)^{n-1} \frac{D_{-1}\left(z_x, z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(k-1)}, z_x^{(k+1)}, \ldots, z_x^{(n)}\right)}{D_{-1}\left(z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(k-1)}, z_x^{(k+1)}, \ldots, z_x^{(n)}\right)},$$

und nach Gl. (11) des 2. Kap., I, C:

$$T_k\left(z_x^{(k)}\right) = (-1)^{n+k} \frac{D_{-1}\left(z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}\right)}{D_{-1}\left(z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(k-1)}, z_x^{(k+1)}, \ldots, z_x^{(n)}\right)} = \frac{1}{y_x^{(k)}},$$

sodaß

$$T_k^{-1}\left(z_x^{(k)}\right) \equiv T_k^{-1}\left(u_{x-1}^{(k)}\right) = y_x^{(k)}$$

ist. Beachtet man, daß bei der adjungierten Gleichung die Operation $D^{-1} y_x = y_{x-1}$ dieselbe Rolle spielt wie die Operation $D y_x = y_{x+1}$ bei der ursprünglichen Gleichung, so besteht zwischen den beiden gefundenen Relationen

$$S_k^{-1}\left(y_{x+1}^{(k)}\right) = u_x^{(k)} \quad \text{und} \quad T_k^{-1}\left(u_{x-1}^{(k)}\right) = y_x^{(k)}$$

vollkommene Reziprozität.

Mit Benutzung des Operationssymbols $D y_x = y_{x+1}$ und des Symbols der inversen Operation $D^{-1} y_x = y_{x-1}$ läßt sich der Differenzenausdruck $P(y_x)$ folgendermaßen schreiben[2]):

---

1) $T_k(u_{x-1})$ bedeutet, daß in $T_k(u_x)$ *überall* $x-1$ an Stelle von x gesetzt wird.

2) Für das Folgende *Bortolotti*, **3.**

$$P(y_x) = p_x^{(n)} y_x + p_x^{(n-1)} D y_x + \cdots + p_x^{(1)} D^{n-1} y_x + D^n y_x,$$

und der adjungierte Differenzenausdruck:

$$P'(y_x) = p_x^{(n)} y_x + D^{-1}\left(p_x^{(n-1)} y_x\right) + \cdots + D^{-n+1}\left(p_x^{(1)} y_x\right) + D^{-n} y_x$$

oder

$$P'(y_x) = p_x^{(n)} y_x + p_{x-1}^{(n-1)} D^{-1} y_x + \cdots + p_{x-n+1}^{(1)} D^{-n+1} y_x + D^{-n} y_x.$$

Man erhält also den adjungierten Differenzenausdruck, indem man in dem ursprünglichen Ausdruck $P(y_x)$ an Stelle von $D^k y_x$ die inverse Operation $D^{-k} y_x$ setzt und auf $p_x^{(n-k)}$ die Operation D^{-k} ausübt. Um die Adjungierte der Adjungierten zu bilden, hat man daher in $P'(y_x)$ an Stelle von $D^{-k} y_x$ die inverse Operation $D^k y_x$ zu setzen und auf $p_{x-k}^{(n-k)}$ die Operation D^k auszuüben; dann erhält man aber wieder $P(y_x)$; also:

a) Die Adjungierte der Adjungierten eines homogenen linearen Differenzenausdruckes ist der gegebene Ausdruck selber.

Ferner folgt leicht:

b) Die Adjungierte der Summe oder Differenz zweier Differenzenausdrücke ist gleich der Summe oder Differenz der Adjungierten.

Sind endlich zwei homogene lineare Differenzenausdrücke

$$A(y_x) \equiv \sum a_r(x) D^r y_x \quad \text{und} \quad B(y_x) \equiv \sum b_r(x) D^r y_x$$

gegeben, so ist ihr (symbolisches) Produkt[1])

$$AB(y_x) = \sum (a_0 b_r + a_1 D b_{r-1} + \cdots + a_r D^r b_0) D^r y_x.$$

Die Adjungierte dieses Produktes lautet:

$$\begin{aligned}(AB)'(y_x) &= \sum D^{-r}[(a_0 b_r + a_1 D b_{r-1} + \cdots + a_r D^r b_0) y_x] \\ &= \sum (D^{-r} a_0 D^{-r} b_r + D^{-r} a_1 D^{-r+1} b_{r-1} + \cdots + D^{-r} a_r b_0) D^{-r} y_x \\ &= \sum (b_0 D^{-r} a_r + D^{-1} b_1 D^{-r} a_{r-1} + \cdots + D^{-r} b_r D^{-r} a_0) D^{-r} y_x \\ &= B' A'(y_x),\end{aligned}$$

worin

$$A'(y_x) \equiv \sum D^{-r} a_r D^{-r} y_x \quad \text{und} \quad B'(y_x) \equiv \sum D^{-r} b_r D^{-r} y_x$$

die Adjungierten von $A(y_x)$ bez. $B(y_x)$ sind; also:

c) Die Adjungierte des Produktes $AB(y_x)$ zweier homogener linearer Differenzenausdrücke ist gleich dem in entgegengesetzter Reihenfolge der Faktoren genommenen Produkt $B'A'(y_x)$ ihrer Adjungierten.

Daraus folgt sofort der *Reziprozitätssatz:*

---

1) Vgl. 2. Kap., V.

d) Die Adjungierte des Produktes mehrerer homogener linearer Differenzenausdrücke

$$AB \dots HK(y_x)$$

ist das in entgegengesetzter Reihenfolge der Faktoren genommene Produkt

$$K'H' \dots B'A'(y_x)$$

ihrer Adjungierten.

Betrachten wir z. B. das Produkt zweier einander adjungierter Ausdrücke

$$B(y_x) = AA'(y_x),$$

so ist nach dem Reziprozitätssatze und nach a):

$$B'(y_x) = (A')'A'(y_x) = AA'(y_x).$$

Also:

e) Das Produkt zweier einander adjungierten Differenzenausdrücke ist mit seiner Adjungierten identisch.

Da ein homogener linearer Differenzenausdruck nullter Ordnung $a_x y_x$ sich selbst adjungiert ist, so gilt Satz e) auch noch für den allgemeineren Ausdruck $Aa_xA'(y_x)$. — Ferner ergibt sich aus dem Reziprozitätssatze und aus der Zerlegungsformel (3a) der vorigen Nr. III sowie aus den Entwicklungen der Nr. I dieses Kapitels:

f) Die Adjungierte des Differenzenausdruckes

$$A(y_x) = \Delta \frac{1}{\eta_x^{(n)}} \Delta \frac{1}{\eta_x^{(n-1)}} \cdots \Delta \frac{1}{\eta_x^{(3)}} \Delta \frac{1}{\eta_x^{(2)}} \Delta \frac{y_x}{\eta_x^{(1)}}$$

lautet:

$$A'(y_x) = \Delta' \frac{1}{\eta_x^{(1)}} \Delta' \frac{1}{\eta_x^{(2)}} \Delta' \frac{1}{\eta_x^{(3)}} \cdots \Delta' \frac{1}{\eta_x^{(n-1)}} \Delta' \frac{y_x}{\eta_x^{(n)}}.$$ [1]

Die Differenzengleichung $A(y_x) = 0$ besitzt die Fundamentallösungen

$$\eta_x^{(1)},\ \eta_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)},\ \dots,\ \eta_x^{(1)} \sum \eta_x^{(2)} \cdots \sum \eta_x^{(n)},$$

die adjungierte Gleichung $A'(y_x) = 0$ die Fundamentallösungen

$$\eta_x^{(n)},\ \eta_x^{(n)} \sum \eta_x^{(n-1)},\ \dots,\ \eta_x^{(n)} \sum \eta_x^{(n-1)} \cdots \sum \eta_x^{(1)}.$$ [2]

---

1) $\Delta' u_x = u_{x-1} - u_x$ ist die Adjungierte von $\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$.

2) Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand rühren ebenfalls von *Bortolotti* (**4.** u. **5.**) her, insbesondere über homogene lineare Differenzenausdrücke, die ihren Adjungierten äquivalent sind.

V. Vollständige lineare Differenzengleichungen.[1]

Unter einer *vollständigen* linearen Differenzengleichung versteht man die Gleichung

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = p_x .$$

Ein besonderer Existenzbeweis für eine Lösung derselben braucht, falls die Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, nicht erbracht zu werden, da man zeigen kann, daß jede Lösung von (1) auch einer *homogenen* linearen Differenzengleichung genügt[2]): Ist nämlich $y_x = \eta_x$ eine Lösung von (1), also $P(\eta_x) = p_x$, und wird $P(\eta_x) \equiv P_x$ gesetzt, so ist

$$p_x P_{x+1} - p_{x+1} P_x = 0;$$

d. h. η_x genügt der homogenen linearen Differenzengleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(2) \qquad p_x P(y_{x+1}) - p_{x+1} P(y_x) = 0. \,^{3)}$$

Aus (2) ergibt sich

$$\frac{P(y_{x+1})}{P(y_x)} = \frac{p_{x+1}}{p_x},$$

also

$$P(y_x) = \omega p_x,$$

worin ω eine willkürliche „Konstante“ bedeutet. Die vollständige Gleichung

$$(3) \qquad P(y_x) - \omega p_x = 0$$

stellt eine „erste Lösung“ von (2) dar, d. h. *jede* Lösung von (3) befriedigt die Gleichung (2), und umgekehrt (bei geeigneter Wahl der „Konstanten“ ω); dem Werte $\omega = 0$ entsprechen die Lösungen der „*reduzierten Gleichung*“ $P(y_x) = 0$, die also ebenfalls der Gleichung (2) genügen. Ist $y_x = \eta_x$ eine Lösung von (2), für welche in (3) $\omega \neq 0$ ist, *so genügt wegen* $P(\omega \eta_x) = \omega P(\eta_x)$ *die Funktion* $y_x = \omega \eta_x$ *der vorgelegten Gleichung* (1).

Ist η_x eine Partikularlösung, y_x die allgemeine Lösung von (1), so genügt $y_x - \eta_x$ der *homogenen* linearen Differenzengleichung

$$(4) \qquad P(\bar{y}_x) = 0;$$

denn aus $P(y_x) = p_x$, $P(\eta_x) = p_x$ folgt $P(y_x) - P(\eta_x) = P(y_x - \eta_x) = 0$. Bilden daher $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen

1) *Lagrange*, **2.** (vgl. *Lacroix*, **1.**; *Boole*, **1.**; *Markoff*, **1.**; *Seliwanoff*, **2.**); *Wallenberg*, **2.**, I.

2) *W.*

3) $P(y_{x+1})$ bedeutet wieder, daß in $P(y_x)$ *überall* $x+1$ an Stelle von x gesetzt wird.

der „reduzierten Gleichung" (4), so lautet die allgemeine Lösung von (1):

$$y_x = \eta_x + \overline{y}_x = \eta_x + \omega_1 y_x^{(1)} + \omega_2 y_x^{(2)} + \cdots + \omega_n y_x^{(n)},$$

worin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ willkürliche „Konstanten" sind.

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß man in vielen Fällen eine solche Partikularlösung direkt finden kann. Hier dagegen wollen wir zeigen, wie man die allgemeine Lösung von (1) mit Hilfe der Lösungen $y_x^{(k)}$ der reduzierten Gleichung (4) und ihrer Adjungierten herstellen kann. Dazu bedienen wir uns der *Lagrange*schen Methode der „*Variation der Konstanten*"[1]: Wir setzen die allgemeine Lösung von (1) in der Form an

$$y_x = c_x^{(1)} y_x^{(1)} + c_x^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots + c_x^{(n)} y_x^{(n)},$$

worin die $c_x^{(k)}$ aber keine „Konstanten", sondern noch zu bestimmende Funktionen von x sind. Da wir n Funktionen zur Verfügung haben und nur *eine* Bedingung zu erfüllen ist, so können wir $n-1$ neue Bedingungen einführen und wählen dieselben so, daß $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}$ dieselbe Form haben, als ob die $c_x^{(k)}$ „Konstanten" wären. Da $c_{x+1} = c_x + \Delta c_x$ ist, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$y_{x+k} = c_x^{(1)} y_{x+k}^{(1)} + c_x^{(2)} y_{x+k}^{(2)} + \cdots + c_x^{(n)} y_{x+k}^{(n)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

mit den Bedingungen

$$(5)\quad y_{x+k}^{(1)} \Delta c_x^{(1)} + y_{x+k}^{(2)} \Delta c_x^{(2)} + \cdots + y_{x+k}^{(n)} \Delta c_x^{(n)} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

zu denen noch die Bedingung

$$(6)\qquad y_{x+n}^{(1)} \Delta c_x^{(1)} + y_{x+n}^{(2)} \Delta c_x^{(2)} + \cdots + y_{x+n}^{(n)} \Delta c_x^{(n)} = p_x$$

tritt, die sich ergibt, wenn man die Werte für $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}$ und

$$y_{x+n} = c_x^{(1)} y_{x+n}^{(1)} + \cdots + c_x^{(n)} y_{x+n}^{(n)} + y_{x+n}^{(1)} \Delta c_x^{(1)} + \cdots + y_{x+n}^{(n)} \Delta c_x^{(n)}$$

in die Gleichung (1) einsetzt. Dividiert man die Gleichungen (5) und (6) durch p_x und vergleicht sie mit den zur vollständigen Bestimmung der adjungierten Funktionen $z_x^{(k)}$ dienenden Gleichung (8) im 2. Kap., I, C, so erhält man

$$\frac{1}{p_x} \Delta c_x^{(k)} = z_{x+1}^{(k)},$$

1) *Lagrange,* **2.**, S. 156 ff.

also

$$c_x^{(k)} = \sum p_x z_{x+1}^{(k)},$$

und daher als allgemeine Lösung der Gleichung (1):

$$(7) \quad y_x = y_x^{(1)} \sum p_x z_{x+1}^{(1)} + y_x^{(2)} \sum p_x z_{x+1}^{(2)} + \cdots + y_x^{(n)} \sum p_x z_{x+1}^{(n)},$$

worin auch (nach der vorigen Nr. IV) $z_x^{(k)} = \dfrac{1}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)}$ gesetzt werden kann; die in (7) auftretenden Summen enthalten noch je eine willkürliche additive „Konstante".

Dieses Resultat folgt auch unmittelbar aus Gleichung (4a) der vorigen Nr. IV [1]): Da nämlich für jede Lösung y_x von (1)

$$P(y_x) = p_x$$

ist, so ergibt sich aus (4a) (Nr. IV) das Gleichungssystem:

$$z_x^{(1k)} y_x + z_x^{(2k)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(k)} y_{x+n-1} = \sum z_{x+1}^{(k)} p_x, \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und addiert, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß nach der Definition der $z_x^{(ik)}$:

$$(8) \begin{cases} y_x^{(1)} z_x^{(1_1)} + y_x^{(2)} z_x^{(1_2)} + \cdots + y_x^{(n)} z_x^{(1_n)} = 1, \\ y_x^{(1)} z_x^{(i_1)} + y_x^{(2)} z_x^{(i_2)} + \cdots + y_x^{(n)} z_x^{(i_n)} = 0, \quad \left(i = 2, 3, \ldots, n;\ z_x^{(nk)} = z_x^{(k)}\right) \end{cases}$$

ist, den Ausdruck (7) als allgemeine Lösung der Differenzengleichung (1).

Wir sind jetzt imstande, die Untersuchungen über die Zusammensetzung bzw. Zerlegung homogener linearer Differenzenausdrücke im 2. Kap., V zu vervollständigen [2]): Wenn die homogene lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung $P(y_x) = 0$ durch *alle* Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung k^{ter} Ordnung $Q(y_x) = 0$ $(k < n)$ befriedigt wird, so ist nach dem 2. Kap., V:

$$P(y_x) = R\,Q(y_x),$$

worin R ein homogener linearer Differenzenausdruck $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, dessen Koeffizienten sich aus denen von P und Q und deren sukzessiven Werten rational zusammensetzen. Es sei nun $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(k)}$ ein Fundamentalsystem von $Q(y_x) = 0$, $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(k)}, y_x^{(k+1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von $P(y_x) = 0$, so genügen die von Null verschiedenen Funktionen

---

1) *Wallenberg,* **2.**, 1. 2) W.

$$w_x^{(1)} = Q\left(y_x^{(k+1)}\right),\ w_x^{(2)} = Q\left(y_x^{(k+2)}\right),\ \ldots,\ w_x^{(n-k)} = Q\left(y_x^{(n)}\right)$$

der homogenen linearen Differenzengleichung $R(y_x) = 0$; und zwar bilden sie ein Fundamentalsystem derselben, da aus einer Relation

$$\omega_1 w_x^{(1)} + \cdots + \omega_{n-k} w_x^{(n-k)} \equiv Q\left(\omega_1 y_x^{(k+1)} + \cdots + \omega_{n-k} y_x^{(n)}\right) = 0$$

folgen würde, daß die Gleichung $Q(y_x) = 0$ mehr als k linear unabhängige Lösungen besitzt, was nach dem 2. Kap., III unmöglich ist.

Ist umgekehrt w_x die *allgemeine* Lösung der Gleichung $R(y_x) = 0$, so befriedigt jede Lösung η_x der vollständigen Gleichung

$$Q(y_x) = w_x$$

die Gleichung $P(y_x) = 0$, da

$$P(\eta_x) = R\,Q(\eta_x) = R(w_x) = 0$$

ist. Die allgemeine Lösung dieser vollständigen Gleichung

$$y_x = y_x^{(1)} \sum w_x z_{x+1}^{(1)} + y_x^{(2)} \sum w_x z_{x+1}^{(2)} + \cdots + y_x^{(k)} \sum w_x z_{x+1}^{(k)},$$

worin $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(k)}$ bestimmte Lösungen der zu $Q(y_x) = 0$ adjungierten Gleichung $\overline{Q}(z_x) = 0$ sind, stellt daher auch die allgemeine Lösung von $P(y_x) = 0$ dar, da sie n wesentlich verschiedene willkürliche „Konstanten" enthält: w_x enthält $n-k$ willkürliche „Konstanten" und jede der k Summen je eine additive willkürliche „Konstante".

Als besonderen Fall behandeln wir *die lineare Differenzengleichung erster Ordnung*:

(A) $$y_{x+1} - p_x y_x = q_x.$$ [1]

Ist u_x eine Lösung der reduzierten Gleichung

(B) $$y_{x+1} - p_x y_x = 0,$$

also nach dem 1. Kap., II, C:

$$u_x = \overline{\omega} \prod p_x,$$

und setzt man

$$y_x = c_x u_x,$$

so ergibt die Gleichung (A):

$$c_{x+1} u_{x+1} - p_x c_x u_x = q_x,$$

oder, da $c_{x+1} = c_x + \Delta c_x$ und $u_{x+1} - p_x u_x = 0$ ist:

$$u_{x+1} \Delta c_x = q_x, \quad \Delta c_x = \frac{q_x}{u_{x+1}}, \quad c_x = \sum \frac{q_x}{u_{x+1}} + \omega',$$

1) *Lagrange*, **1.** (vgl. *Boole*, **1.**).

worin $\overline{\omega}$ und ω' „Konstanten“ sind. Die allgemeine Lösung von (A) lautet also:

$$y_x = u_x \sum \frac{q_x}{u_{x+1}} + \omega' u_x,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\text{(C)} \qquad y_x \doteq \prod p_x \sum \frac{q_x}{\prod p_{x+1}} + \omega \prod p_x;$$

darin ist auch $\omega = \overline{\omega} \cdot \omega'$ eine „Konstante“, während sich $\overline{\omega}$ im ersten Gliede rechts gehoben hat, so daß $\overline{\omega}$ stets gleich 1 gesetzt werden kann. — Es sei noch bemerkt, daß die *nicht lineare* Differenzengleichung erster Ordnung

$$p_x u_x u_{x+1} + q_x u_{x+1} + r_x u_x = 0$$

nach Division durch $u_x u_{x+1}$ mittels der Substitution $y_x = \frac{1}{u_x}$ in eine *lineare* Differenzengleichung erster Ordnung transformiert werden kann.

Beispiele:

1. $$y_{x+1} - 3y_x = a^x \quad \text{(Seliwanoff).}$$

Hier ist $q_x = a^x$, $p_x = 3$, also $u_x = 3^x$. Der Ausdruck $\sum \frac{a^x}{3^{x+1}}$ hat verschiedene Werte, je nachdem $a \neq 3$ oder $a = 3$. Ist $a \neq 3$, so ist

$$\sum \frac{a^x}{3^{x+1}} = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{a}{3}\right)^x = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^x}{\frac{a}{3} - 1},$$

und daher

$$y_x = \frac{a^x}{a-3} + \omega \cdot 3^x.$$

Ist dagegen $a = 3$, so ist

$$\sum \frac{a^x}{3^{x+1}} = \frac{1}{3} \sum 1 = \frac{1}{3} x,$$

also

$$y_x = \tfrac{1}{3} x \cdot 3^x + \omega \cdot 3^x.$$

2. $$y_{x+1} - \frac{2x+7}{2x+1} \cdot \frac{3x+1}{3x+4} y_x = \frac{1}{3x+4} \quad \text{(Markoff, Seliwanoff).}$$

Die Gleichung

$$\frac{y_{x+1}}{y_x} = \frac{p_{x+k}}{p_x} \left(= \frac{p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+k}}{p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1}} \right)$$

hat offenbar die Lösung

$$y_x = \omega\, p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1};$$

daher ist hier:

$$u_x = \frac{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{3x+1}, \qquad \frac{q_x}{u_{x+1}} = \frac{1}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)},$$

$$\sum \frac{q_x}{u_{x+1}} = \frac{1}{8} \sum \frac{1}{(x+\frac{3}{2})(x+\frac{5}{2})(x+\frac{7}{2})} = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{(x+\frac{3}{2})(x+\frac{5}{2})} \text{ [1]}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2x+3)(2x+5)},$$

also

$$y_x = -\frac{1}{4}\,\frac{2x+1}{3x+1} + \omega\,\frac{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{3x+1}.$$

3. $$y_{x+1} - x y_x = \Gamma(x+1) \quad \text{(Boole).}$$

$$u_x = \Gamma(x), \qquad \sum \frac{\Gamma(x+1)}{u_{x+1}} = \sum 1 = x,$$

$$y_x = (x+\omega)\,\Gamma(x).$$

4. *Aus der Rekursionsformel*

$$y_{x+1} - \tfrac{1}{2} y_x = x^2$$

soll y_{100} *berechnet werden, wenn* $y_0 = 0$ *ist. (Markoff).*

$$y_x = \frac{1}{2^x} \sum 2^{x+1} \cdot x^2 = \frac{1}{2^{x-1}} \sum 2^x x^2 + \frac{\omega}{2^x},$$

und durch zweimalige Anwendung der *partiellen Summation* [2]):

$$y_x = \frac{1}{2^{x-1}} \left[2^x (x^2 - 2(2x+1) + 8) \right] + \frac{\omega}{2^x};$$

da bei diesem Beispiel nur ganzzahlige x in Betracht kommen, so ist hier ω eine wirkliche Konstante, und zwar $\omega = -12$ wegen $y_0 = 0$; also:

$$y_x = 2x^2 - 8x + 12 - \frac{12}{2^x},$$

---

1) Nach der bekannten Formel

$$\sum \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = -\frac{1}{n}\,\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)};$$

siehe z. B. *Seliwanoff*, **2.**, S. 34 (vgl. *1. Kap.*, II, B, Formel (b)).

2) $\sum u_x \Delta v_x = u_x v_x - \Delta u_x \sum v_{x+1}$ (siehe z. B. *Seliwanoff*, **2.**, S. 37; vgl. *1. Kap.*, II, B, Formel (h)).

woraus

$$y_{100} = 19212 - \frac{12}{2^{100}} = 19212 - \frac{3}{2^{98}},$$

d. h. äußerst nahe

$$y_{100} = 19212$$

folgt.

VI. Iteration linearer homogener Differenzenausdrücke. Symbolische Potenz.[1])

Wird ein homogener linearer Differenzenausdruck n^{ter} Ordnung

$$P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x$$

„iteriert“, d. h. mit sich selbst komponiert, so entsteht ein homogener linearer Differenzenausdruck von der Ordnung $2n$:

$$P_1(y_x) \equiv PP(y_x) \equiv P^2(y_x) = p_x^{(0)} P(y_{x+n}) + p_x^{(1)} P(y_{x+n-1}) + \cdots + p_x^{(n)} P(y_x);$$

derselbe wird befriedigt durch die Lösungen von $P(y_x) = 0$ und durch die Lösungen der *vollständigen* Gleichung $P(y_x) = \eta_x$, wo η_x eine Lösung von $P(y_x) = 0$ ist. Aus der letzteren Gleichung geht hervor, daß das Iterationsresultat wesentlich z. B. von $p_x^{(n)}$ abhängt; und da man durch Multiplikation der Gleichung $P(y_x) = 0$ mit einer willkürlichen Funktion von x diesem Koeffizienten jeden beliebigen Wert geben kann, so liefert demnach die (ein- oder mehrmalige) Iteration einer homogenen linearen Differenzengleichung eine unendliche Menge von homogenen linearen Differenzengleichungen, welche mit der ursprünglichen Gleichung sämtliche Lösungen gemeinsam haben.

Wir wählen nun als Ausgangsgleichung eine homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung:

$$P(y_x) \equiv s_x y_{x+1} - t_x y_x = 0$$

und iterieren sie n-mal; die dadurch entstehende Differenzengleichung n^{ter} Ordnung $P^n(y_x) = 0$ besitzt zunächst eine Lösung von

$$\frac{y_{x+1}}{y_x} = \frac{t_x}{s_x}, \quad \text{also} \quad y_x = \prod \frac{t_x}{s_x} = \eta_x^{(1)};$$

ferner eine Lösung von $s_x y_{x+1} - t_x y_x = \eta_x^{(1)}$, also nach der vorigen Nr. V:

$$y_x = \eta_x^{(1)} \sum \frac{\eta_x^{(1)}}{s_x \eta_{x+1}^{(1)}} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x} = \eta_x^{(2)};$$

ferner eine Lösung von $s_x y_{x+1} - t_x y_x = \eta_x^{(2)}$, also:

1) *Wallenberg*, **2.**, S. 53 ff.

$$y_x = \eta_x^{(1)} \sum \frac{\eta_x^{(2)}}{s_x \eta_{x+1}^{(1)}} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{\eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x}}{s_x \eta_{x+1}^{(1)}} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x} \sum \frac{1}{t_x}$$

$$= \eta_x^{(1)} \sum^2 \frac{1}{t_x} = \eta_x^{(3)}$$

usf. Die Differenzengleichung $P^n(y_x) = 0$ besitzt also die Lösungen

$$\eta_x^{(1)} = \prod \frac{t_x}{s_x}, \quad \eta_x^{(2)} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x}, \quad \eta_x^{(3)} = \eta_x^{(1)} \sum^2 \frac{1}{t_x}, \ \ldots,$$

$$\eta_x^{(n)} = \eta_x^{(1)} \sum^{n-1} \frac{1}{t_x},$$

von denen man ähnlich wie in Nr. I dieses Kapitels zeigen kann, daß sie voneinander linear unabhängig sind.

Wählt man insbesondere $t_x = 1$, so werden diese Lösungen:

$$\eta_x^{(1)} = \prod \frac{1}{s_x}, \quad \eta_x^{(2)} = \eta_x^{(1)} \sum 1 = \eta_x^{(1)} \cdot x, \quad \eta_x^{(3)} = \eta_x^{(1)} \sum x = \eta_x^{(1)} \frac{x(x-1)}{2}, \ \ldots,$$

$$\eta_x^{(n)} = \eta_x^{(1)} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)};$$

aus ihnen ergeben sich durch geeignete lineare Verbindungen folgende Lösungen:

$$y_x^{(1)} = \eta_x^{(1)}, \ y_x^{(2)} = x\eta_x^{(1)}, \ y_x^{(3)} = x^2 \eta_x^{(1)} \left(= 2\eta_x^{(3)} + \eta_x^{(2)}\right), \ \ldots, \ y_x^{(n)} = x^{n-1} \eta_x^{(1)}.$$

Die Lösung $\eta_x^{(1)}$ ist also nach unserer früheren Bezeichnung (3. Kap., II) n-fache Lösung der Gleichung $P^n(y_x) = 0$; besitzt umgekehrt eine homogene lineare Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ die n-fache Lösung η_x, so ist

$$Q(y_x) = R P^n(y_x),$$

worin

$$P(y_x) \equiv \frac{\eta_x}{\eta_{x+1}} y_{x+1} - y_x$$

ist. Hieraus ergibt sich die Berechtigung unserer Terminologie.

Die Differenzengleichung $P^n(y_x) = 0$ geht durch die Transformation

$$y_x = \eta_x^{(1)} u_x = \prod \frac{1}{s_x} \cdot u_x$$

in diejenige Differenzengleichung über, welche die Lösungen $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ besitzt, d. h. in eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, die man symbolisch folgendermaßen schreiben kann:

$$\Delta^n u_x = (D-1)^n u_x = 0;$$

zwischen den n Lösungen $y_x^{(k)}$ von $P^n(y_x) = 0$ bestehen $n - 2$ homogene Relationen zweiten Grades von parabolischem Typus

$$y_x^{(k)^2} - y_x^{(k-1)} y_x^{(k+1)} = 0.$$

Wir wollen noch untersuchen, wann eine homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0$$

durch Iteration aus einer homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung

$$s_x y_{x+1} - t_x y_x = 0$$

hervorgeht. Es ist:

$$(s_x y_{x+1} - t_x y_x)(s_x y_{x+1} - t_x y_x)\ ^{1)} = s_x s_{x+1} y_{x+2} - s_x(t_x + t_{x+1}) y_{x+1} + t_x^2 y_x;$$

es muß daher sein:

$$-\frac{t_x + t_{x+1}}{s_{x+1}} = q_x, \quad \frac{t_x^2}{s_x s_{x+1}} = r_x.$$

Setzt man $\frac{t_x}{s_x} = u_x$, so wird

$$\frac{t_x}{s_{x+1}} + u_{x+1} = -q_x, \quad \frac{t_x}{s_{x+1}} u_x = r_x,$$

also durch Elimination von $\frac{t_x}{s_{x+1}}$:

$$u_x u_{x+1} + q_x u_x + r_x = 0;$$

setzt man ferner $u_x = \frac{v_{x+1}}{v_x}$, so geht diese Gleichung über in

$$v_{x+2} + q_x v_{x+1} + r_x v_x = 0,$$

welche mit der vorgelegten Gleichung identisch ist. Aus $t_x = s_x u_x$, $\frac{t_x}{s_{x+1}} u_x = r_x$ ergibt sich:

$$\frac{s_{x+1}}{s_x} = \frac{u_x^2}{r_x}, \quad s_x = \omega \prod \frac{u_x^2}{r_x}, \quad t_x = \omega u_x \prod \frac{u_x^2}{r_x};$$

darin ist $u_x = \frac{\eta_{x+1}}{\eta_x}$, wo η_x eine Lösung der vorgelegten Gleichung zweiter Ordnung bedeutet. Wir sehen also, daß die Koeffizienten q_x und r_x gar keiner Beschränkung unterworfen sind, und können den Satz aussprechen:

Jede beliebige homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung kann als Iteration einer homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung dargestellt werden.

---

1) Das Produkt ist symbolisch aufzufassen.

Durch Koeffizientenabzählung erkennt man leicht, daß diese
schaft auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränkt ist; für Gleich
höherer als zweiter Ordnung, welche Iterationen von Gleich
niedrigerer Ordnung sind, müssen zwischen den Koeffizienten
Bedingungsgleichungen bestehen. — Da die homogene lineare
renzengleichung zweiter Ordnung sich stets als Iteration einer
chung erster Ordnung darstellen läßt, so haben ihre Lösungen
obigem die Form:

$$y_x^{(1)} = \eta_x,$$

$$y_x^{(2)} = \eta_x \sum \frac{1}{t_x} = \omega \eta_x \sum \frac{\eta_x}{\eta_{x+1}} \prod r_x \left(\frac{\eta_x}{\eta_{x+1}}\right)^2 = \omega \eta_x \sum \frac{\prod r_x}{\eta_x \eta_{x+1}}$$

1) Vgl. 2. Kap., III, 1. Anwendung, sowie 3. Kap., I, 1. Beispiel.

Viertes Kapitel.

Gruppentheorie 1. Teil. Transformation.

I. Invariante Funktionen der Lösungen eines Fundamentalsystems.[1]

Es sei gegeben die lineare homogene Differenzengleichung

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0,$$

worin die p_x gegebene rationale Funktionen von x bedeuten. Wir nennen irgend eine rationale Funktion eines Fundamentalsystems $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ von Lösungen der Gleichung (1) und ihrer sukzessiven Werte $y_{x+1}^{(1)}$, $y_{x+1}^{(2)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)}$; $y_{x+2}^{(1)}, \ldots, y_{x+2}^{(n)}$; ... mit rationalen Koeffizienten eine *invariante* Funktion der Fundamentallösungen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihrer sukzessiven Werte, wenn sie als Funktion von $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihren sukzessiven Werten *formal invariant* bleibt, falls man $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihre sukzessiven Werte den Substitutionen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe unterwirft, d. h. $y_x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch

$$z_x^{(i)} = a_{i1} y_x^{(1)} + a_{i2} y_x^{(2)} + \cdots + a_{in} y_x^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und entsprechend $y_{x+p}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch

$$z_{x+p}^{(i)} = a_{i1} y_{x+p}^{(1)} + \cdots + a_{in} y_{x+p}^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ersetzt, wobei die a_{ik} ein System von n^2 beliebigen „Konstanten" bedeuten, deren Determinante von Null verschieden ist (vgl. 2. Kap., II, B).

Wir haben schon ein System solcher invarianten Funktionen kennen gelernt; denn die Koeffizienten p_x der Gleichung (1) sind solche rationale Funktionen der $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihrer sukzessiven

1) *Guldberg,* **1**[b], **7**[a], Kap. 1; vgl. *Stephansen,* **2.**

Werte. Die Gleichung (1) läßt sich ja (vgl. 2. Kap., III) in Determinantenform folgendermaßen schreiben:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} y_{x+n}, & y_{x+n-1}, & \ldots, & y_x \\ y^{(1)}_{x+n}, & y^{(1)}_{x+n-1}, & \ldots, & y^{(1)}_x \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y^{(n)}_{x+n}, & \cdot & \ldots, & y^{(n)}_x \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten $p_x^{(i)}$ sind folglich darstellbar als Quotienten zweier Determinanten und bleiben daher invariant, wenn die $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ einer linearen Substitution unterworfen werden, da Zähler und Nenner sich mit derselben Determinante multiplizieren. (2. Kap., III.)

Wir werden jetzt folgendes Theorem beweisen:

Jede rationale invariante Funktion eines Fundamentalsystems $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ *von Lösungen der Differenzengleichung* (1) *und ihrer sukzessiven Werte mit rationalen Koeffizienten läßt sich rational durch die* $p_x^{(i)}$ *und ihre sukzessiven Werte ausdrücken.*[1])

Wir bemerken zuerst: hat man irgend eine rationale *invariante* Funktion von $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihren sukzessiven Werten mit rationalen Koeffizienten, so kann man mit Hilfe der Gleichung (1) die n^{ten} und höheren sukzessiven Werte beseitigen und erhält durch diese Reduktion eine rationale Funktion, die $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und deren sukzessive Werte höchstens bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ enthält, und, da die Gleichung (1) rationale Koeffizienten enthält, ebenfalls nur rationale Koeffizienten besitzt.

Nach dieser Reduktion haben wir dann eine rationale Funktion

$$R\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)};\ y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)};\ \ldots;\ y_{x+n-1}^{(1)}, \ldots, y_{x+n-1}^{(n)}\right),$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen der $p_x^{(i)}$ und ihrer sukzessiven Werte sind. Wir werden jetzt zeigen, daß die Funktion R *in dieser Form* frei von $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihren sukzessiven Werten, also eine bloße Funktion der $p_x^{(i)}$ und ihrer sukzessiven Werte ist.[2])

Man hat nämlich:

$$(3)\qquad R\left(z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)};\ z_{x+1}^{(1)}, \ldots;\ z_{x+n-1}^{(1)}, \ldots\right) = R\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)};\ y_{x+1}^{(1)}, \ldots;\ y_{x+n-1}^{(1)}, \ldots\right),$$

---

1) Analogon des *Appell*schen Satzes aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Ann. de l'Éc. Norm. (2) **10**, 391).

2) Die Koeffizienten derselben sind rationale Funktionen von x.

wo die $p_x^{(i)}$ und ihre sukzessiven Werte in den Koeffizienten von R auf beiden Seiten dieselben geblieben sind.

Wir können nun die „Konstanten" a_{ik} so wählen, daß für einen gegebenen, sonst aber willkürlichen Wert von x, für welchen $D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) \neq 0$ ist, die Funktionen

$$z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)};\; z_{x+1}^{(1)}, \ldots, z_{x+1}^{(n)};\; z_{x+n-1}^{(1)}, \ldots, z_{x+n-1}^{(n)}$$

willkürlich vorgeschriebene Werte annehmen. (Vgl. 2. Kap., II, A.)

Hinge dann R von irgend einem dieser Werte ab, so wäre die Gleichung (3) unmöglich; denn die rechte Seite ist von den a_{i_k} unabhängig, während die linke Seite einen bestimmten Wert mit den a_{i_k} annimmt. Die Funktion R kann also nicht von den $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}, \ldots, y_{x+n-1}^{(1)}$ abhängen, sondern nur eine Funktion der $p_x^{(i)}$ und ihrer sukzessiven Werte sein. Q. e. d.

Ist die rationale Differenzenfunktion $R(y_x)$ keine absolute, sondern nur eine relative Invariante, d. h. multipliziert sie sich bei Ersetzung der $y_x^{(i)}$ durch die $z_x^{(i)}$ mit einer von Null verschiedenen „Konstanten":

$$R[z_x] = cR[y_x],$$

so folgt zunächst aus den Prinzipien der algebraischen Invariantentheorie, daß c gleich einer ganzzahligen Potenz der Substitutionsdeterminante

$$\delta \equiv |a_{i_k}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sein muß: $c = \delta^m$. Nun ist aber

$$D\left(z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)}\right) = \delta \cdot D\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right),$$

also

$$\frac{R[z_x]}{D[z_x]^m} = \frac{R[y_x]}{D[y_x]^m};$$

d. h. $\frac{R[y_x]}{D[y_x]^m}$ ist eine absolute Invariante und daher nach obigem eine rationale Funktion der Koeffizienten $p_x^{(i)}$ und ihrer sukzessiven Werte. Folglich wird, da nach früherem (*2. Kap.*, III):

$$D_x \equiv D[y_x] = \omega \Pi (-1)^n p_x^{(n)}$$

ist, $R[y_x]$ *gleich einer rationalen Funktion der* $p_x^{(i)}$ *und ihrer sukzessiven Werte, multipliziert mit einer Potenz von* $\omega \Pi (-1)^n p_x^{(n)}$.

Die Determinante

$$D_x^{(\lambda)} = \left| y_{x+\nu}^{(1)}, y_{x+\nu}^{(2)}, \ldots, y_{x+\nu}^{(n)} \right| \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-\lambda-1, n-\lambda+1, \ldots, n)$$

ergibt sich z. B. leicht als Funktion der p [illegible]; wir haben nämlich:

$$p [illegible] \; 1 \; \frac{n}{n} [illegible]$$ (vgl. 2. *Kap.*, III).

also:

$$D [illegible] \; 1 \; p \; \omega \prod [illegible] \; 1 \; p [illegible].$$

Das Theorem von der invarianten Funktion der Fundament[illegible] lösungen findet eine Anwendung bei der Bestimmung der Bedingun[illegible] dafür, daß zwei lineare homogene Differenzengleichungen der Or[illegible] nungen n und m:

$$P_x(y_x) = 0, \quad Q_x(y_x) = 0$$

eine gemeinsame Lösung besitzen.

Es sei $y_x^1, \ldots, y_x^n$ ein System von Fundamentallösungen v[illegible] $P_x(y_x) = 0$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, da[illegible] die beiden Gleichungen eine gemeinsame Lösung besitzen, ist:

$$Q_x(C_1 y_x^1 + \ldots + C_n y_x^n) = 0$$

oder

$$C_1 Q_x(y_x^1) + C_2 Q_x(y_x^2) + \ldots + C_n Q_x(y_x^n) = 0,$$

wo die C „Konstanten" sind. Folglich hat man:

$$Q_x(y_x^1) \quad Q [illegible] \quad [illegible]$$

$$Q_{x+1}(y^1) \quad Q [illegible] \quad [illegible] = 0$$

$$Q_{x+n-1}(y^1) \quad Q [illegible] \quad [illegible]$$

Die linke Seite dieser Gleichung [illegible] Funktion der Lösungen $y_x^1, \ldots, y_x^n$, und man [illegible] durch den Faktor $\omega \prod [illegible] \; 1 \; p [illegible]$ die gesuchte Bedingung [illegible] Form, daß eine rationale Funktion der Koeffizienten [illegible] und ihrer sukzessiven Werte gleich Null [illegible] Kap. IV.

Beispiel. Man stelle die Bedingung [illegible] lineare homogene Differenzengleichungen [illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

eine gemeinsame Lösung besitzen.

Auflösung:

Eine zweite Anwendung findet das Theorem über die invarianten Funktionen bei der Bestimmung derjenigen homogenen linearen Differenzengleichung, welche die Lösungen zweier gegebenen linearen homogenen Differenzengleichungen der Ordnungen n und m: $P_x(y_x) = 0$ und $Q_x(z_x) = 0$ besitzt. Es sei $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein System von Fundamentallösungen der ersten Differenzengleichung und $z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(m)}$ ein System von Fundamentallösungen der zweiten Differenzengleichung.

Die gesuchte homogene lineare Differenzengleichung, deren Ordnung $n + m$ ist, schreibt sich dann:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} y_{x+m+n} & y^{(1)}_{x+m+n} & \cdots y^{(n)}_{x+m+n}, & z^{(1)}_{x+m+n} & \cdots z^{(m)}_{x+m+n} \\ y_{x+m+n-1} & y^{(1)}_{x+m+n-1} & \cdots y^{(n)}_{x+m+n-1}, & z^{(1)}_{x+m+n-1} & \cdots z^{(m)}_{x+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ y_x & y^{(1)}_x & \cdots y^{(n)}_x, & z^{(1)}_x & \cdots z^{(m)}_x \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine relativ-invariante Funktion von

$$\begin{array}{l} y_x^{(1)},\ y_{x+1}^{(1)},\ \ldots,\ y_{x+m+n}^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_x^{(n)},\ y_{x+1}^{(n)},\ \ldots,\ y_{x+m+n}^{(n)} \end{array}$$

und von

$$\begin{array}{l} z_x^{(1)},\ z_{x+1}^{(1)},\ \ldots,\ z_{x+m+n}^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_x^{(n)},\ z_{x+1}^{(n)},\ \ldots,\ z_{x+m+n}^{(n)}. \end{array}$$

Sie läßt sich folglich, abgesehen von dem Faktor $\omega \prod (-1)^{m+n} p_x^{(n)} q_x^{(m)}$, als rationale Funktion der Koeffizienten der beiden gegebenen Differenzengleichungen und ihrer sukzessiven Werte ausdrücken.[1])

Dieselbe Methode dient auch zur Bestimmung der linearen homogenen Differenzengleichung, welche die Lösungen dreier oder mehrerer linearen homogenen Differenzengleichungen besitzt. — Besitzen aber die gegebenen linearen homogenen Differenzengleichungen gemeinsame Lösungen, so ist die aufgestellte Determinante (4) identisch Null, da sie eine oder mehrere identische Kolonnen besitzt.

Man bildet in diesem Falle erst die lineare homogene Differenzengleichung $R_x(y_x) = 0$, welche die gemeinsamen Lösungen der beiden gegebenen Differenzengleichungen besitzt (den größten gemeinsamen Teiler, 2. Kap., VI). Die gegebenen Differenzengleichungen schreiben sich daher:

$$P(y_x) \equiv SR(y_x) = 0, \quad Q(y_x) \equiv TR(y_x) = 0.$$

1) *Stephansen,* **2.**; vgl. *2. Kap.,* VI.

Die beiden linearen homogenen Differenzengleichungen

$$S(u_x) = 0 \quad \text{und} \quad T(u_x) = 0$$

haben dann keine gemeinsamen Lösungen. Man bildet dann nach der angegebenen Methode die lineare homogene Differenzengleichung:

$$A(u_x) = 0,$$

welche die Lösungen von $S(u_x) = 0$ und $T(u_x) = 0$ besitzt. Die gesuchte lineare homogene Differenzengleichung ist dann

$$AR(y_x) = 0 \quad \text{(vgl. 2. Kap., VI).}$$

Außer den bisher betrachteten invarianten rationalen Funktionen eines Systems von Fundamentallösungen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ gibt es auch rationale Funktionen, die bei einer *Untergruppe* der linearen homogenen Gruppe invariant bleiben.

Betrachten wir zum Beispiel die lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung[1]):

$$y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0,$$

so lautet die allgemeine lineare homogene Gruppe:

$$z_x^{(1)} = a_1 y_x^{(1)} + a_2 y_x^{(2)},$$

$$z_x^{(2)} = a_3 y_x^{(1)} + a_4 y_x^{(2)}.$$

Eine ihrer Untergruppen ist:

$$z_x^{(1)} = a_1 y_x^{(1)} + a_2 y_x^{(2)},$$

$$z_x^{(2)} = a_3 y_x^{(1)} + a_4 y_x^{(2)},$$

wo

$$a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1$$

ist. Der Ausdruck

$$\Delta_x = y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}$$

ist, wie man leicht verifiziert, invariant bei dieser letzten Gruppe. Er genügt der linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung:

$$\Delta_{x+1} - q_x \Delta_x = 0.$$

Aufgabe. Wie bestimmt man die lineare homogene Gruppe, bei der eine gegebene rationale Funktion eines Systems von Fundamentallösungen formal invariant wird?

---

1) *Guldberg,* 7 b, Kap. III.

Beispiel. Es wird die Gruppe des Ausdruckes:

$$\frac{1}{y_x^{(1)}}\left[y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}\right]$$

gesucht.

Auflösung:

$$z_x^{(1)} = a y_x^{(1)}$$
$$z_x^{(2)} = b y_x^{(1)} + y_x^{(2)}.$$

II. Transformation einer homogenen linearen Differenzengleichung.[1]

Es sei

$$\eta_x = R\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)};\; y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+1}^{(n)};\; y_{x+2}^{(1)}, \ldots\right),$$

wo R eine ganze rationale Funktion der Lösungen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ eines Fundamentalsystems der Gleichung (1) und ihrer sukzessiven Werte ist. Das allgemeine Problem der Transformation besteht darin, eine lineare homogene Differenzengleichung zu bilden, welche die Funktion η_x als Lösung besitzt.

Um die Ordnung der gesuchten linearen homogenen Differenzengleichung in η_x zu bestimmen, ersetzen wir $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}; y_{x+1}^{(1)}, \ldots$ durch die Lösungen eines andern Fundamentalsystems $z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)}$:

$$\left.\begin{array}{l} y_x^{(i)} \;\;\, = a_{i1} z_x^{(1)} \;\;\, + a_{i2} z_x^{(2)} \;\;\, + \cdots + a_{in} z_x^{(n)}, \\ y_{x+1}^{(i)} = a_{i1} z_{x+1}^{(1)} + a_{i2} z_{x+1}^{(2)} + \cdots + a_{in} z_{x+1}^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Ordnung der linearen homogenen Differenzengleichung in η_x ist dann gleich der Anzahl der linear unabhängigen Glieder, die in dem transformierten Ausdruck für η_x auftreten. Es sei p diese Anzahl, und es seien

$$\varphi_x^{(1)},\; \varphi_x^{(2)},\; \ldots,\; \varphi_x^{(p)}$$

die p linear unabhängigen Glieder. Die lineare homogene Differenzengleichung in η_x ist dann

$$\begin{vmatrix} \eta_{x+p} & \varphi_{x+p}^{(1)} & \cdots & \varphi_{x+p}^{(p)} \\ \eta_{x+p-1} & \varphi_{x+p-1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{x+p-1}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_x & \varphi_x^{(1)} & \cdots & \varphi_x^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

---

1) *Guldberg*, 7a, Kap. II.

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind augenscheinlich relativ-invariante Funktionen von $z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)}$ und ihren sukzessiven Werten und daher nach Division durch einen gemeinsamen Faktor in x rational ausdrückbar durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung.

Betrachten wir beispielsweise die lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$P(y_x) \equiv y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0,$$

und suchen wir die lineare homogene Differenzengleichung, deren Lösungen die Quadrate der Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

Wir setzen:

$$\eta_x = y_x^{(1)\,2}.$$

Der allgemeine Ausdruck für η_x ist dann:

$$\eta_x = \left[a_1 z_x^{(1)} + a_2 z_x^{(2)}\right]^2.$$

Wir haben hier drei linear unabhängige Glieder:

$$\left[z_x^{(1)}\right]^2; \quad \left[z_x^{(1)} z_x^{(2)}\right]; \quad \left[z_x^{(2)}\right]^2.$$

Die gesuchte lineare homogene Differenzengleichung ist also im allgemeinen von der dritten Ordnung. Sie ergibt sich in folgender Form:

$$R(\eta_x) \equiv \eta_{x+3} + \left[\frac{p_{x+1}}{p_x} q_{x+1} - p_{x+1}^2\right]\eta_{x+2} + \left[p_x p_{x+1} q_{x+1} - q_{x+1}^2\right]\eta_{x+1} + \frac{p_{x+1}}{p_x} q_{x+1} q_x^2 \eta_x \quad 0.$$ [1]

Zwischen den drei Lösungen $\eta_x^{(1)} = y_x^{(1)\,2}$, $\eta_x^{(2)} = y_x^{(1)} y_x^{(2)}$, $\eta_x^{(3)} = y_x^{(2)\,2}$ besteht die homogene quadratische Relation

$$\eta_x^{(2)\,2} - \eta_x^{(1)} \eta_x^{(3)} = 0.$$

Eine einfache Transformation ist die folgende:

$$(\alpha) \qquad \eta_x = a_x^{(0)} y_{x+m}^{(1)} + a_x^{(1)} y_{x+m-1}^{(1)} + \cdots + a_x^{(m)} y_x^{(1)} \equiv A\left(y_x^{(1)}\right),$$

wo die a_x rationale Funktionen von x sind und $y_x^{(1)}$ eine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung (1) ist. Man sieht leicht, daß die lineare homogene Differenzengleichung in η_x im allgemeinen von derselben Ordnung wie die gegebene Gleichung ist. Erstens sieht man, wenn $m > n$, daß man mit Hilfe der Gleichung (1) die höheren

---

1) *Heymann*, **1.**, S. 410; vgl. *Wallenberg*, **2.**

sukzessiven Werte $y_{x+n}, y_{x+n+1}, \ldots, y_{x+m}$ aus der Formel (α) wegschaffen kann, sodaß man zuletzt erhält:

$$\eta_x = \alpha_{01} y^{(1)}_{x+n-1} + \alpha_{02} y^{(1)}_{x+n-2} + \cdots + \alpha_{0n} y^{(1)}_x,$$

wo die α_{0_k} rationale Funktionen von x sind.

Nimmt man nun die sukzessiven Werte von η_x und eliminiert mit Hilfe der Gleichung (1) die höheren sukzessiven Werte von y_x, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\eta_x &= \alpha_{01} y^{(1)}_{x+n-1} + \cdots + \alpha_{0n} y^{(1)}_x, \\
\eta_{x+1} &= \alpha_{11} y^{(1)}_{x+n-1} + \cdots + \alpha_{1n} y^{(1)}_x, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_{x+n} &= \alpha_{n1} y^{(1)}_{x+n-1} + \cdots + \alpha_{n1} y^{(1)}_x.
\end{aligned}$$

Eliminiert man $y^{(1)}_x, \ldots, y^{(1)}_{x+n-1}$ aus diesen $n+1$ Gleichungen, so erhält man die gesuchte Gleichung für η_x.

Umgekehrt drückt sich die Lösung $y^{(1)}_x$ in derselben Weise durch η_x aus. Denn betrachten wir die n ersten der vorhergehenden Gleichungen, die von erstem Grade in bezug auf

$$y^{(1)}_x, \; y^{(1)}_{x+1}, \; \ldots, \; y^{(1)}_{x+n-1}$$

sind, so erhalten wir insbesondere:

$$y^{(1)}_x = \beta_1 \eta_{x+n-1} + \beta_2 \eta_{x+n-2} + \cdots + \beta_n \eta_x.$$

Die Auflösung dieser n Gleichungen ersten Grades ist gestattet; denn wäre die Determinante des Gleichungssystems Null, so bestände eine Relation mit rationalen Koeffizienten:

$$\lambda_1 \eta_{x+n-1} + \lambda_2 \eta_{x+n-2} + \cdots + \lambda_n \eta_x = 0,$$

was unmöglich ist, da der allgemeine Ausdruck für η_x durch die Integrale der linearen homogenen Differenzengleichung (1) n linear unabhängige Glieder $A\left(z^{(1)}_x\right), \ldots, A\left(z^{(n)}_x\right)$ enthält, vorausgesetzt, daß die Gleichung

$$A(y_x) \equiv a^{(0)}_x y_{x+m} + a^{(1)}_x y_{x+m-1} + \cdots + a^{(m)}_x y_x = 0$$

nicht gemeinsame Integrale mit der Gleichung (1) besitzt, in welchem Falle die Gleichung in η_x augenscheinlich einer Reduktion unterliegt.[1]

Die beiden linearen homogenen Differenzengleichungen in y_x und η_x heißen Gleichungen *derselben Art*.

Wir werden einige Sätze über solche Gleichungen entwickeln.

---

1) Vgl. den folgenden Abschnitt.

III. Lineare homogene Differenzengleichungen derselben Art.

Hat man zwei lineare homogene Differenzengleichungen

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0,$$

$$(2) \qquad Q(z_x) \equiv z_{x+m} + q_x^{(1)} z_{x+m-1} + \cdots + q_x^{(m)} z_x = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, so sagt man, *die Gleichung* (2) *gehö* *mit* (1) *zu derselben Art, oder ist mit* (1) *von derselben Art,* wenn ma durch die Beziehung

$$(3) \qquad z_x = a_x^{(0)} y_x + a_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + a_x^{(n-1)} y_{x+n-1} \equiv A(y_x),$$

wo die a_x rationale Funktionen sind, von den Lösungen der Diffe renzengleichung (1) zu denen der Differenzengleichung (2) über gehen kann.

Ist insbesondere in der angeführten Relation (3):

$$a_x^{(1)} = \cdots = a_x^{(n-1)} = 0,$$

so sagen wir, die beiden linearen homogenen Differenzengleichunge sind *ähnlich*.

Nach unserer Definition und den Auseinandersetzungen in Nr. 1 sind alle linearen homogenen Differenzengleichungen, die mit eine vorgegebenen von derselben Art sind, mit ihr von gleicher ode niedrigerer Ordnung.

Ist $n > m$, so wird man *nicht* durch eine zu (3) analoge Relatio von dem allgemeinen Integral von (2) zu dem der Gleichung (1 übergehen können; ist also $n > m$ und die Gleichung (2) mit (1) vo derselben Art, so ist *nicht* auch (1) mit (2) von derselben Art. Di eingeführte Beziehung ist also nicht wechselseitig. Ist die Gleichung (2) mit (1) von derselben Art und auch (1) mit (2) von derselbe Art, so sagen wir: die beiden linearen homogenen Differenzengleichungen sind *gegenseitig* von derselben Art, oder auch kurz, si sind von derselben Art; in diesem Falle müssen nach obigem beid von derselben Ordnung sein.

Aus unserer Definition folgt unmittelbar:

Ist die Gleichung (2) mit (1) von derselben Art und die Glei chung (1) mit einer anderen linearen homogenen Differenzengleichung n^{ter} oder höherer Ordnung, die auch rationale Koeffizienten hat, von derselben Art, so ist auch die Gleichung (2) mit dieser von derselben Art.

---

1) *Guldberg*, S.

Es mögen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $P(y_x) = 0$ bilden; bezeichnen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ irgend n „Konstanten", so ist, wenn die Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ mit der Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ zu derselben Art gehört und der Übergang von den Integralen von (1) zu denen von (2) durch die Relation (3) vermittelt wird,

$$A\left(\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}\right)$$

stets ein Integral von $Q(y_x) = 0$, und ferner sind in der Form $A\left(\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}\right)$ alle Integrale von $Q(y_x) = 0$ enthalten; denn $\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}$ ist das allgemeine Integral der Gleichung $P(y_x) = 0$. Da

$$A\left(\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}\right) = \sum_1^n \mu_k A\left(y_x^{(k)}\right)$$

ist, so folgt, daß unter den n Funktionen

$$A\left(y_x^{(1)}\right), \; A\left(y_x^{(2)}\right), \; \ldots, \; A\left(y_x^{(n)}\right)$$

die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung $Q(y_x) = 0$ enthalten sein müssen.

Ist $Q(y_x) = 0$ eine lineare homogene Differenzengleichung von der Ordnung $m = n - \nu$, so kann die Gleichung $Q(y_x) = 0$ nur m linear unabhängige Integrale besitzen. Mithin muß ein System von $n \cdot \nu$ „Konstanten" λ_{kl} $\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, \nu \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$ derart existieren, daß die ν von einander unabhängigen Relationen:

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} A\left(y_x^{(l)}\right) = 0, \quad \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} A\left(y_x^{(l)}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} A\left(y_x^{(l)}\right) = 0$$

zwischen den Funktionen $A\left(y_x^{(1)}\right), A\left(y_x^{(2)}\right), \ldots, A\left(y_x^{(n)}\right)$ bestehen. Das soeben hergeleitete Gleichungssystem sagt aus, daß die ν Funktionen

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} y_x^{(l)}, \quad \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} y_x^{(l)}, \quad \ldots, \quad \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} y_x^{(l)}$$

ν unabhängige Integrale der linearen homogenen Differenzengleichung $A(y_x) = 0$ sind. Die beiden linearen homogenen Differenzengleichungen $P(y_x) = 0$ und $A(y_x) = 0$ haben daher ν linear unabhängige Integrale gemeinsam.

Angenommen, $\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1_l} y_x^{(l)}$, wobei $\lambda_{\nu+1_l}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ n „Konstanten" bedeuten, sei ein $(\nu+1)^{\text{res}}$ gemeinsames partikuläres Integral der beiden Gleichungen $P(y_x) = 0$ und $A(y_x) = 0$, und dieses Integral sei keine lineare homogene Kombination mit konstanten Koeffizienten der schon gefundenen gemeinsamen Integrale; so folgt aus

$$A\left(\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1_l} y_x^{(l)}\right) = 0$$

eine $(\nu+1)^{\text{te}}$ von den schon vorhandenen ν Relationen unabhängige Relation

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1_l} A\left(y_x^{(l)}\right) = 0$$

zwischen den Funktionen $A\left(y_x^{(1)}\right), A\left(y_x^{(2)}\right), \ldots, A\left(y_x^{(n)}\right)$. Da die Gleichung $Q(y_x) = 0$ von der Ordnung $n - \nu$ ist, so können zwischen den n Funktionen $A\left(y_x^{(1)}\right), A\left(y_x^{(2)}\right), \ldots, A\left(y_x^{(n)}\right)$, die unter sich die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen von $Q(y_x) = 0$ enthalten, nur ν unabhängige Relationen bestehen; daher ist unsere Annahme falsch. Mithin haben die beiden linearen homogenen Differenzengleichungen $Q(y_x) = 0$ und $A(y_x) = 0$ genau ν linear unabhängige Integrale gemeinsam. Hieraus folgt die Existenz einer linearen homogenen Differenzengleichung $R(y_x) = 0$ von der Ordnung ν mit rationalen Koeffizienten, welche die den beiden linearen homogenen Differenzengleichungen $P(y_x) = 0$ und $A(y_x) = 0$ gemeinsamen ν linearen unabhängigen Integrale zum Fundamentalsystem besitzt. Wir gewinnen also den Satz:

Gehört eine lineare homogene Differenzengleichung $(n-\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer linearen homogenen Differenzengleichung n^{ter} Ordnung zu derselben Art, so existiert eine lineare homogene Differenzengleichung ν^{ter} Ordnung mit rationalen Koeffizienten, deren sämtliche Integrale der Differenzengleichung n^{ter} Ordnung genügen.

Der Artbegriff wird vertieft und vereinfacht durch den Begriff des kleinsten Vielfachen (2. Kap., VI) in Verbindung mit dem nunmehr einzuführenden Begriff des *„inversen Differenzenausdruckes"*[1]: Es seien $P(y_x)$ und $R(y_x)$ zwei homogene lineare Differenzenausdrücke von der Ordnung p bzw. r ohne gemeinsamen Teiler, sodaß die Resultante Δ der beiden homogenen linearen Differenzengleichungen $P = 0$ und $R = 0$ (2. *Kap.*, IV u. VI) von Null verschieden ist. Wir bestimmen

1) *Guldberg*, **10.** (vgl. *Heffter*, Journ. für Math. **116**, 161 ff.).

nun einen homogenen linearen Differenzenausdruck P_{-1} von der Ordnung $r-1$ durch die Gleichung:

$$(4) \qquad P_{-1}P(y_x) = y_x + TR(y_x),$$

worin T ein homogener linearer Differenzenausdruck von der Ordnung $p-1$ ist; für die Koeffizienten von P_{-1} und T erhält man durch eine ganz analoge Rechnung wie im *2. Kap.*, VI ein nicht homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Determinante gerade Δ ist. Ist nun $y_x^{(R)}$ eine Lösung von $R=0$, so folgt aus (4):

$$(5) \qquad P_{-1}P\left(y_x^{(R)}\right) = y_x^{(R)};$$

wir nennen daher P_{-1} *den zu* P *in bezug auf den Modul* R *inversen Differenzenausdruck.* Für das kleinste Vielfache V der beiden Ausdrücke P und R gilt nach dem *2. Kap.*, VI die Gleichung:

$$(6) \qquad V = SP = QR,$$

worin S und Q homogene lineare Differenzenausdrücke von der Ordnung r bzw. p sind; aus dieser Gleichung folgt:

$$(7) \qquad P\left(y_x^{(R)}\right) = y_x^{(S)},$$

worin $y_x^{(S)}$ eine Lösung von $S=0$ bedeutet. Ist $p \leqq r-1$, so gehört daher die Gleichung $S=0$ mit $R=0$ zu derselben Art. Ferner folgt aus (5) und (7) sofort:

$$(8) \qquad P_{-1}\left(y_x^{(S)}\right) = y_x^{(R)};$$

die Gleichungen $R=0$ und $S=0$ sind also gegenseitig von derselben Art. Ist umgekehrt $S=0$ mit $R=0$ von derselben Art, so folgt aus (7), daß SP durch R teilbar sein muß: $SP = QR$.

Man erhält also sämtliche Gleichungen $S=0$, *die mit* $R=0$ *zu derselben Art gehören, indem man das kleinste gemeinsame Vielfache von* R *und dem allgemeinsten homogenen linearen Differenzenausdruck* $(r-1)^{ter}$ *Ordnung* P *bildet.* — Besitzt R mit P einen gemeinsamen Teiler von der Ordnung ν, so wird S von der Ordnung $r-\nu$ und umgekehrt (vgl. *2. Kap.*, VI), was mit dem obigen Satze übereinstimmt.

IV. Assoziierte Differenzengleichungen.[1]

Die Theorie der Transformation einer linearen homogenen Differenzengleichung führte uns durch eine spezielle Transformation zur Betrachtung der linearen homogenen Differenzengleichungen derselben Art. Außer diesen gibt es noch eine interessante Klasse von linearen

---

1) *Guldberg,* 4, **11.**

homogenen Differenzengleichungen, die durch eine andere einfache Transformation hervorgehen.

Es sei gegeben die lineare homogene Differenzengleichung:

$$(1) \qquad P(y_x) = y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0,$$

wo die p_x rationale Funktionen der x sind. Es sei $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein System von Fundamentallösungen. Wir betrachten die Determinante dieser Lösungen:

$$\Delta\left(y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)}, & y_x^{(2)}, & \ldots, & y_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)}, & y_{x+1}^{(2)}, & \ldots, & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)}, & y_{x+n-1}^{(2)}, & \ldots, & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante genügt nach früherem der linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung:

$$\Delta_{x+1} - (-1)^n p_x^{(n)} \Delta_x = 0.$$

Wir werden nun untersuchen, welcher Gleichung die aus denselben m Zeilen von Δ entnommenen Subdeterminanten genügen.

Wir denken uns die sämtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung dieser Determinante gebildet, wo $m < n$; die Anzahl dieser Subdeterminanten ist gleich

$$\nu^2 = \left\{\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\right\}^2 = \binom{n}{m}^2.$$

Diejenigen dieser Subdeterminanten, die aus den Elementen des Systems

$$\begin{matrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \ldots & y_x^{(m)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} & \ldots & y_{x+1}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & y_{x+n-1}^{(2)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(m)} \end{matrix}$$

gebildet sind, wollen wir durch

$$u_x^{11}, u_x^{21}, \ldots, u_x^{\nu 1}$$

bezeichnen und insbesondere

$$u_x^{11} = D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}\right)$$

nehmen. Ferner bezeichnen wir jene Determinanten, die aus u_x^{k1} dadurch entstehen, daß man die $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ und deren sukzessive

Werte durch die sukzessiven Werte gleich hoher Ordnung irgend einer anderen Kombination von m verschiedenen Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ersetzt, mit

$$u_x^{k2}, u_x^{k3}, \ldots, u_x^{k\nu},$$

sodaß also die

$$u_x^{i\lambda} \quad (i, \lambda = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$$

jene ν^2 Subdeterminanten m^{ter} Ordnung darstellen. Diejenigen Determinanten, welche aus

$$u_x^{11}, u_x^{21}, \ldots, u_x^{\nu 1}$$

hervorgehen, wenn wir in denselben an die Stelle von $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ irgend ein System von m linear unabhängigen Lösungen $\bar{y}_x^{(1)}, \bar{y}_x^{(2)}, \ldots, \bar{y}_x^{(m)}$ der Gleichung (1) setzen, mögen endlich bezeichnet werden durch

$$u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(\nu)}.$$

Bilden wir die sukzessiven Werte von $u_x^{(i)}$ und schaffen die eventuell auftretenden sukzessiven Werte höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\bar{y}_x^{(1)}, \bar{y}_x^{(2)}, \ldots, \bar{y}_x^{(m)}$ mit Hilfe der Differenzengleichung (1) fort, so ist offenbar:

$$u_{x+1}^{(i)} = \varphi_1^{i1} u_x^{(1)} + \varphi_1^{i2} u_x^{(2)} + \cdots + \varphi_1^{i\nu} u_x^{(\nu)}$$

und ebenso allgemein

$$(2) \qquad u_{x+\lambda}^{(i)} = \varphi_\lambda^{i1} u_x^{(1)} + \varphi_\lambda^{i2} u_x^{(2)} + \cdots + \varphi_\lambda^{i\nu} u_x^{(\nu)},$$

wo die φ_λ^{ik} rationale Funktionen bedeuten, die sich aus den Koeffizienten von (1) und deren sukzessiven Werten durch rationale Operationen zusammensetzen lassen.

Die Gleichungen (2) bleiben, wie aus ihrer Bildungsweise sofort zu übersehen ist, bestehen, wenn man in denselben die $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(\nu)}$ durch irgend eines der Systeme

$$u_x^{1k}, u_x^{2k}, \ldots, u_x^{\nu k} \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ersetzt.

Nehmen wir die Gleichungen (2) für $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$, und denken wir uns aus den so entstehenden ν Gleichungen die $\nu - 1$ Größen $u_x^{(k)}$, $k \neq i$, eliminiert, so ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$(3) \qquad P_i^{(\nu)} u_{x+\nu}^{(i)} + P_i^{(\nu-1)} u_{x+\nu-1}^{(i)} + \cdots + P_i^{(0)} u_x^{(i)} = 0,$$

der die Funktionen $u_x^{i1}, u_x^{i2}, \ldots, u_x^{i\nu}$ Genüge leisten und deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Wenn $P^{(\nu)}_i$ von Null verschieden ist, so ist also die Differenzengleichung (3) auch wirklich von der Ordnung ν. Wenn wir für $i = 1$ den Index 1 in der Gleichung (3) weglassen, so genügt also $u^{(1)}_x$ für jede Wahl der $\overline{y}^{(1)}_x, \overline{y}^{(2)}_x, \ldots, \overline{y}^{(m)}_x$ der Differenzengleichung:

$$(4) \qquad P^{(\nu)} u_{x+\nu} + P^{(\nu-1)} u_{x+\nu-1} + \cdots + P^{(0)} u_x = 0,$$

die demnach auch durch $u^{11}_x, u^{12}_x, \ldots, u^{1\nu}_x$ befriedigt wird. Da nach Voraussetzung $P^{(\nu)} = |\varphi^{1\varkappa}_\lambda| \; \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \\ \varkappa = 2, 3, \ldots, \nu \end{pmatrix}$ von Null verschieden ist, so kann man aus den Gleichungen (2) für $i = 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ die $\nu - 1$ Größen $u^{(2)}_x, \ldots, u^{(\nu)}_x$ berechnen und erhält

$$u^{(\varkappa)}_x = \chi^{\varkappa_0} u^{(1)}_x + \chi^{\varkappa_1} u^{(1)}_{x+1} + \cdots + \chi^{\varkappa_{\nu-1}} u^{(1)}_{x+\nu-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots, \nu),$$

worin die χ rationale Funktionen von x sind; die Differenzengleichungen (3) für $i = 2, 3, \ldots, \nu$ gehören daher mit der Differenzengleichung (4) zu derselben Art.

Die Differenzengleichung ν^{ter} Ordnung (4), $P^{(\nu)} \neq 0$, nennen wir, analog wie in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die $(n - m)^{\text{te}}$ *der gegebenen* Differenzengleichung (2) assoziierte Differenzengleichung. Von besonderem Interesse ist die *erste* Assoziierte, welche, wie man sofort sieht, in engem Zusammenhange mit der adjungierten Differenzengleichung (vgl. *3. Kap.*, IV) steht. Durch die vollständige Analogie zwischen der einer linearen homogenen Differentialgleichung zugeordneten assoziierten Differentialgleichung und der einer linearen homogenen Differenzengleichung assoziierten Differenzengleichung lassen sich die meisten formalen Sätze über assoziierte Differentialgleichungen ohne weiteres auf assoziierte Differenzengleichungen übertragen.

1. *Beispiel.* Es sei gegeben die lineare homogene Differenzengleichung dritter Ordnung:

$$y_{x+3} = p^{(1)}_x y_{x+2} + p^{(2)}_x y_{x+1} + p^{(3)}_x y_x.$$

Es sei $y^{(1)}_x, y^{(2)}_x, y^{(3)}_x$ ein System von Fundamentallösungen. Wir setzen

$$u^{(1)}_x = \begin{vmatrix} y^{(1)}_x & y^{(2)}_x \\ y^{(1)}_{x+1} & y^{(2)}_{x+1} \end{vmatrix}, \quad u^{(2)}_x = \begin{vmatrix} y^{(1)}_x & y^{(2)}_x \\ y^{(1)}_{x+2} & y^{(2)}_{x+2} \end{vmatrix}, \quad u^{(3)}_x = \begin{vmatrix} y^{(1)}_{x+1} & y^{(2)}_{x+1} \\ y^{(1)}_{x+2} & y^{(2)}_{x+2} \end{vmatrix}.$$

Die erste assoziierte Differenzengleichung, die von der Ordnung $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ ist, lautet:

$$u_{x+3} = -p^{(2)}_{x+1} u_{x+2} - p^{(1)}_x p^{(3)}_{x+1} u_{x+1} + p^{(3)}_x p^{(3)}_{x+1} u_x.$$

Ein System von Fundamentallösungen ist

$$u_x^{1_1} \left(= u_x^{(1)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} \end{vmatrix}, \quad u_x^{1_2} = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(3)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(3)} \end{vmatrix}, \quad u_x^{1_3} = \begin{vmatrix} y_x^{(2)} & y_x^{(3)} \\ y_{x+1}^{(2)} & y_{x+1}^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Ferner ist

$$u_x^{(2)} = -\frac{p_x^{(2)}}{p_x^{(3)}} u_{x+1}^{(1)} - \frac{1}{p_x^{(3)}} u_{x+2}^{(1)}, \quad u_x^{(3)} = u_{x+1}^{(1)}.$$

2. *Aufgabe.* Ein System von Fundamentallösungen der 2ten, 3ten, ..., $(n-2)^{\text{ten}}$ assoziierten Differenzengleichungen befriedigt nicht lineare homogene algebraische Gleichungen. Man bestimme diese homogenen Relationen für die zweite assoziierte Differenzengleichung einer linearen homogenen Differenzengleichung vierter Ordnung. (Vgl. *Schlesinger*, Handbuch II, S. 138 ff.).

Auflösung. Die sechs Determinanten

$$y_x^{(i)} y_{x+1}^{(k)} - y_x^{(k)} y_{x+1}^{(i)} = \omega_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, \ i < k)$$

bilden ein System von Fundamentallösungen der assoziierten Gleichung. Die gesuchte Beziehung ist:

$$\omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0.$$

3. *Aufgabe* Übertragung der Untersuchungen über assoziierte Differentialgleichungen (*Schlesinger*, Handbuch II, S. 151 ff.) auf Differenzengleichungen.

Fünftes Kapitel.

Reduzibilität.

I. Begriff der Reduzibilität einer linearen homogenen Differenzengleichung.[1]

Es sei gegeben die lineare homogene Differenzengleichung n^{ter} Ordnung:

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0.$$

Wenn man über die Natur der Koeffizienten p_x keine besonderen Voraussetzungen macht, kann man jede Lösung $y_x^{(k)}$ der linearen homogenen Differenzengleichung (1) als Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung:

$$y_{x+1} - \frac{y_{x+1}^{(k)}}{y_x^{(k)}} y_x = 0$$

auffassen und dementsprechend (vgl. *3. Kap.*, III) die linke Seite $P(y_x)$ von (1) aus n linearen Differenzenausdrücken erster Ordnung zusammensetzen.

Für das analytische Studium der Funktionen, die durch die Differenzengleichung (1) definiert werden, ist aber eine solche Zerlegung in lineare Differenzenausdrücke erster Ordnung nur von geringer Bedeutung, wie auch die entsprechenden Zerlegungen bei algebraischen Gleichungen und linearen Differentialgleichungen gezeigt haben.

Es erweist sich daher notwendig, den Begriff der Reduzibilität in die Theorie der linearen homogenen Differenzengleichungen einzuführen. Es ist zuerst nötig, eine besondere Voraussetzung über die Natur der Koeffizienten $p_x^{(i)}$ der gegebenen Gleichung (1) zu machen. Wir setzen voraus, daß sie *rationale* Funktionen von x sind.

Die Gleichung (1) heißt dann *irreduzibel*, wenn sie mit *keiner* linearen homogenen Differenzengleichung niedrigerer Ordnung, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Funktionen von x sind, eine Lösung

---

1) *Pincherle* (u. *Amaldi*), 9, Kap. X; *Guldberg*, 1b (19. Okt. 1903).

emeinsam hat; im entgegengesetzten Falle heißt die Differenzen-
leichung (1) *reduzibel.*

Eine homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit
ationalen Koeffizienten wird stets als irreduzibel angesehen, da eine
omogene lineare Differenzengleichung nullter Ordnung nur die triviale
ösung $y_x = 0$ besitzt.

Der so gefaßte Begriff der Irreduzibilität ist natürlich ein rela-
ver, indem er wesentlich von den über die Natur der Koeffizienten
er Differenzengleichung getroffenen Annahmen abhängig ist. Man
ıgt im allgemeinen, daß die Koeffizienten einer linearen homogenen
ifferenzengleichung einem bestimmten *Rationalitätsbereiche* (Σ) an-
ehören, wenn sie einem System von Funktionen der unabhängigen
ariablen x angehören von der Beschaffenheit, daß Summe, Differenz,
rodukt und Quotient je zweier ihm angehörigen Funktionen sowie
er sukzessive Wert $f(x+1)$ jeder ihm angehörigen Funktion $f(x)$
leichfalls in dem System vorkommt.

Eine lineare homogene Differenzengleichung mit Koeffizienten
ıs Σ heißt in bezug auf den Rationalitätsbereich Σ *irreduzibel,* wenn
e mit keiner linearen homogenen Differenzengleichung niedrigerer
rdnung, die ebenfalls nur Koeffizienten aus Σ besitzt, eine Lösung
emeinsam hat; anderenfalls heißt sie in dem Rationalitätsbereich Σ
duzibel.

Einen Rationalitätsbereich Σ bilden z. B. alle rationalen Zahlen
der alle reellen Zahlen oder die Gesamtheit aller rationalen Funk-
onen der Variablen x.

Wir beschränken uns in den folgenden Untersuchungen also auf
en Rationalitätsbereich aller rationalen Funktionen von x.

Wir stellen nun eine Anzahl von Sätzen auf, die denen für die
gebraischen Gleichungen und die linearen homogenen Differential-
leichungen analog sind.

Angenommen, die lineare homogene Differenzengleichung $P(y_x) = 0$
ei reduzibel, und die Differenzengleichung niedrigerer (m^{ter}) Ordnung

$$Q(y_x) \equiv y_{x+m} + q_{x+m}^{(1)} + q_x^{(1)} y_{x+m-1} + \cdots + q_x^{(m)} y_x = 0,$$

orin die $q_x^{(i)}$ rationale Funktionen von x sind, mit der sie eine
ösung gemeinsam hat, sei irreduzibel. Nach dem 2. Kap., IV können
ir $P(y_x)$ in der Form schreiben

$$P(y_x) \equiv R\,Q(y_x) + S(y_x),$$

o $S(y_x)$ einen Differenzenausdruck bedeutet, der von niedrigerer Ord-
ung ist als $Q(y_x)$, der durch die gemeinsamen Lösungen von $P(y_x) = 0$
nd $Q(y_x) = 0$ annulliert wird und dessen Koeffizienten rationale
unktionen von x sind. Da $Q(y_x) = 0$ als irreduzible Differenzen-

gleichung mit keiner Differenzengleichung $S(y_x) = 0$ niedrigerer Ordnung und mit rationalen Koeffizienten eine Lösung gemeinsam haben kann, so muß $S(y_x)$ identisch verschwinden, d. h. es ist:

$$P = RQ;$$

folglich wird $P(y_x) = 0$ durch *sämtliche* Lösungen von $Q(y_x) = 0$ befriedigt.

Wenn also eine homogene lineare Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten mit einer irreduziblen Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten eine Lösung gemeinsam hat, so wird sie durch ***alle*** *Lösungen der irreduziblen Differenzengleichung befriedigt.*

Sind nun

$$P(y_x) = 0, \quad Q(y_x) = 0$$

zwei lineare homogene Differenzengleichungen, beziehungsweise n^{ter} und m^{ter} Ordnung ($m \geqq n$) mit rationalen Koeffizienten, so haben wir gesehen, daß man die Frage, ob sie und welche Integrale sie gemeinsam haben, durch ein Verfahren beantworten kann, welches demjenigen zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Zahlen oder zweier ganzen Funktionen völlig analog ist (vgl. *2. Kap.*, IV).

Es sei $m > n$, dann können wir die Kette von Identitäten bilden:

$$\text{(a)} \qquad \left|\begin{array}{l} Q = R_1 P + P_1, \\ P = R_2 P_1 + P_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_{i-1} = R_{i+1} P_i + P_{i+1}, \end{array}\right.$$

wo alle R_k und P_k rationale Koeffizienten haben, und, wenn n_k die Ordnung von P_k ist,

$$n > n_1 > \cdots > n_{i+1}$$

ist; diese Ungleichungen haben zur Folge, daß man endlich zu einem verschwindenden n_k gelangen muß, nämlich spätestens für $k = m + 1$. Es sei n_{i+1} das erste verschwindende n_k, so ist P_{i+1} entweder von der Form $r(x) y_x$, wo $r(x)$ eine rationale Funktion von x ist, oder P_{i+1} ist identisch gleich Null. Im ersten Fall haben die Differenzengleichungen $P = 0$, $Q = 0$ nur die triviale Lösung $y = 0$ gemein. Ist aber $r(x) \equiv 0$, so sind alle Integrale von $P_i = 0$ auch Integrale von $P = 0$ und $Q = 0$.

Hieraus folgt:

Wenn eine lineare homogene Differenzengleichung reduzibel ist, so gibt es eine lineare homogene Differenzengleichung niedrigerer Ordnung, deren sämtliche Integrale der vorgelegten genügen.

Ist die Gleichung $P_i = 0$ wieder reduzibel, so liefert dasselbe Verfahren eine Differenzengleichung von niedrigerer Ordnung, deren

sämtliche Integrale der Gleichung $P_\iota = 0$ und folglich der Gleichung $P = 0$ genügen; fährt man so fort, so muß man endlich zu einer irreduziblen Differenzengleichung $Q_1 = 0$ kommen, die alle ihre Integrale mit $P = 0$ gemeinsam hat.

Wenn also eine lineare homogene Differenzengleichung $P=0$ reduzibel ist, so gibt es stets eine oder mehrere irreduzible Differenzengleichungen, die ihre sämtlichen Lösungen mit $P = 0$ gemeinsam haben.

Wenn die Differenzengleichung $P = 0$ durch alle Integrale der irreduzibeln Gleichung $Q_1 = 0$ befriedigt wird, so ist

$$P = R_1 Q_1 ,$$

wo R_1 ein Differenzenausdruck mit rationalen Koeffizienten in x ist; ist die Gleichung $R_1 = 0$ wieder reduzibel, und bedeutet $Q_2 = 0$ eine irreduzible Gleichung, deren Integrale R_1 zu Null machen, so ist

$$R_1 = R_2 Q_2 ,$$

wo R_2 ein Differenzenausdruck mit rationalen Koeffizienten ist; sollte $R_2 = 0$ abermals reduzibel sein, so hätte man so fortzufahren; schließlich erhält man für die linke Seite der Gleichung $P = 0$ die Form:

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_2 Q_1 ,$$

wo die sämtlichen Differenzengleichungen $Q_\lambda = 0$ irreduzibel sind und die Summe der Ordnungszahlen der Differenzenausdrücke $Q_1 \ldots Q_\lambda$ gleich der Ordnungszahl von P ist.

Eine solche Zerlegung eines linearen homogenen Differenzenausdruckes P in irreduzible Faktoren ist aber durchaus nicht eindeutig bestimmt (vgl. Nr. II d. Kap.). Dies zeigt das folgende

Beispiel: Es sei

$$P(y_x) \equiv x(x+1)y_{x+2} - 2x(x+2)y_{x+1} + (x+2)(x+1)y_x = 0$$

und

$$Q(y_x) \equiv xy_{x+1} - (x+1)y_x ; \qquad R(y_x) \equiv xy_{x+1} - (x+2)y_x ;$$

$$S(y_x) \equiv x^2 y_{x+1} - (x+1)^2 y_x ; \qquad T(y_x) \equiv \frac{x}{x+1} y_{x+1} - \frac{x+2}{x+1} y_x .$$

Wir haben dann:

$$P(y_x) \equiv QR(y_x); \quad P(y_x) \equiv TS(y_x) .$$

Die Bedeutung des Begriffes der Irreduzibilität in der Theorie der linearen homogenen Differenzengleichungen liegt darin, daß reduzible lineare homogene Differenzengleichungen gewisse Lösungen haben, die einfacher sind als die allgemeine Lösung. Da man durch die Kenntnis einer Anzahl von partikularen Lösungen das Problem der Integration vereinfachen kann, so ist es klar, daß es von Wichtigkeit ist, festzustellen, ob eine Differenzengleichung reduzibel ist, und wenn

das der Fall ist, diejenigen Lösungen abzusondern, welche den Differenzengleichungen niedrigerer Ordnung genügen.

Die Aufgabe, zu entscheiden, wann eine vorgelegte lineare homogene Differenzengleichung reduzibel ist, läßt sich auf die Frage reduzieren, wann eine lineare homogene Differenzengleichung eine solche Lösung u_x besitzt, daß $\frac{u_{x+1}}{u_x}$ eine rationale Funktion von x ist.

Es sei nämlich $P(y_x) = 0$ eine homogene lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Koeffizienten, die mit der irreduziblen homogenen linearen Differenzengleichung m^{ter} Ordnung $Q(y_x) = 0$ die Lösungen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(m)}$ gemeinsam hat.

Wir betrachten die Determinante:

$$\Delta_x^{(0)} = \left| y_{x+\nu}^{(1)}, y_{x+\nu}^{(2)}, \ldots, y_{x+\nu}^{(m)} \right|, \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

und die m Determinanten

$$\Delta_x^{(\lambda)} = \left| y_{x+\nu}^{(1)}, y_{x+\nu}^{(2)}, \ldots, y_{x+\nu}^{(m)} \right|, \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m-\lambda-1, m-\lambda+1, \ldots, m),$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Quotienten $\frac{\Delta_x^{(\lambda)}}{\Delta_x^{(0)}}$ müssen rationale Funktionen von x sein, da sie Koeffizienten der Gleichung $Q(y_x) = 0$ sind; ferner ist $\Delta_x^{(0)} = \Pi(-1)^m r(x)$, wo $r(x)$ eine rationale Funktion von x ist; von derselben Form sind dann auch die $\Delta_x^{(\lambda)}$, sodaß $\frac{\Delta_{x+1}^{(\lambda)}}{\Delta_x^{(\lambda)}}$ rational ist.

Nun wissen wir andererseits aus der Theorie der assoziierten Gleichungen, daß diese Determinanten Lösungen von linearen homogenen Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten sind. Eine dieser assoziierten Gleichungen besitzt daher eine solche Lösung u_x, daß $\frac{u_{x+1}}{u_x}$ rational ist. Ist dieses für sämtliche assoziierte Gleichungen geprüft worden, so hat man mit den gefundenen Lösungen die möglichen Werte für $\Delta_x^{(0)}$ und $\Delta_x^{(\lambda)}$ bestimmt und folglich auch ihre Quotienten. Man hat dann die $\Delta_x^{(0)}$ und $\Delta_x^{(\lambda)}$ so zu kombinieren, daß ihre Quotienten $\frac{\Delta_x^{(\lambda)}}{\Delta_x^{(0)}}$ rational sind. Für jede so gebildete lineare homogene Differenzengleichung m^{ter} Ordnung muß untersucht werden, ob ihre allgemeine Lösung der Gleichung $P(y_x) = 0$ genügt.

1. *Aufgabe.* Wie lautet die allgemeine Form einer linearen homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung, wenn sie reduzibel ist?

Auflösung:

$$y_{x+2} + p_x y_{x+1} - R_x(p_x + R_{x+1}) y_x = 0,$$

wo R_x eine rationale Funktion von x ist.

Ein System von Fundamentallösungen ist:

$$y_x^{(1)} = \prod R_x; \quad y_x^{(2)} = y_x^{(1)} \sum z_x,$$

worin

$$z_x = (-1)^x \prod \left(\frac{R_{x+1} + p_x}{R_{x+1}} \right).$$

Beispiel. Die Gleichung:

$$y_{x+2} - 2\frac{x+2}{x+1} y_{x+1} + \frac{x+2}{x} y_x = 0$$

ist reduzibel (vgl. das vorhergehende Beispiel). Hier ist $p_x = -2\frac{x+2}{x+1}$ und $R_x = \frac{x+1}{x}$. Die beiden Fundamentallösungen sind $y_x^{(1)} = x$; $y_x^{(2)} = x^2$.

2. *Satz.* Jede lineare homogene Differenzengleichung, die vielfache Lösungen besitzt, ist reduzibel. (*Guldberg*, **3.**; vgl. 3. Kap., II.)

3. *Satz.* Gehört eine lineare homogene Differenzengleichung $(n-\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer linearen homogenen Differenzengleichung n^{ter} Ordnung zu derselben Art, so ist die letztere reduzibel. (*Guldberg*, **8.**, vgl. *4. Kap.*, III, Schluß.)

4. *Satz.* Wenn eine lineare homogene Differenzengleichung n^{ter} Ordnung irreduzibel ist, so sind sämtliche linearen homogenen Differenzengleichungen derselben Art irreduzibel. (*Guldberg*, **10.**)

5. *Satz.* Wenn eine lineare homogene Differenzengleichung n^{ter} Ordnung reduzibel ist, so sind sämtliche linearen homogenen Differenzengleichungen derselben Art reduzibel oder von niedrigerer als n^{ter} Ordnung. (*Guldberg*, **10.**)

II. Die Zerlegung homogener linearer Differenzenausdrücke in irreduzible Faktoren.[1]

Ist

$$P \equiv p_x^{(n)} y_{x+n} + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(0)} y_x = 0$$

eine lineare homogene Differenzengleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Koeffizienten, so kann man den linearen homogenen Differenzenaus-

1) *Guldberg*, **6**; vgl. die analogen Untersuchungen über homogenene lineare Differentialgleichungen von *A. Loewy*, Math. Ann. **56**, 565 ff.

druck P in irreduzible Faktoren zerlegen:

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} Q_{\lambda-2} \dots Q_2 Q_1,$$

sodaß die Summe der Ordnungen dieser Faktoren gleich der Ordnung von P wird; $Q_\lambda = 0$, $Q_{\lambda-1} = 0, \dots, Q_2 = 0$, $Q_1 = 0$ sind irreduzible homogene lineare Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten. Eine solche Zerlegung eines linearen homogenen Differenzenausdruckes P in irreduzible Faktoren ist, wie wir sahen, durchaus nicht eindeutig bestimmt. Es gilt nun der Satz:

Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differenzenausdruck in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung einander eineindeutig so zuordnen, daß immer die beiden durch Nullsetzen der zugeordneten Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differenzengleichungen gegenseitig von derselben Art sind.

Wir wollen also den folgenden Satz beweisen:

Ist neben

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \dots Q_2 Q_1 \tag{1}$$

auch

$$P = K_\mu K_{\mu-1} \dots K_2 K_1 \tag{2}$$

eine zweite Zerlegung von P in irreduzible Faktoren, so kann man einer jeden der linearen homogenen irreduziblen Differenzengleichungen $Q_\sigma = 0$ $(\sigma = 1, 2, \dots, \lambda)$, die bei der Zerlegung (1) resultieren, eine gewisse lineare homogene irreduzible Differenzengleichung $K_i = 0$ so zuordnen, daß bei dieser Zuordnung ein jeder Faktor von (2) nur einmal verwandt wird, hierdurch alle Faktoren $K_\mu, K_{\mu-1}, \dots, K_1$ (nur eventuell nicht in dieser Reihenfolge) erschöpft werden und die beiden zugeordneten Differenzengleichungen immer gegenseitig von derselben Art sind.

Für lineare homogene Differenzenausdrücke P erster Ordnung ist unser Satz offenbar richtig; denn in diesem Falle ist P irreduzibel. Wir können daher das Theorem für alle Differenzenausdrücke P von niedrigerer als n^{ter} Ordnung als bewiesen betrachten und brauchen es nur für solche n^{ter} Ordnung zu beweisen.

Beim Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die beiden irreduziblen homogenen linearen Differenzengleichungen $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ ein Integral oder kein Integral gemeinsam haben.

1. Haben $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ ein Integral gemeinsam, so haben sie infolge ihrer Irreduzibilität alle Integrale gemeinsam; sie sind daher gegenseitig von derselben Art. In diesem Falle können sich K_1 und Q_1 nur um einen bloß von der Variablen x abhängigen Faktor, der eine rationale Funktion ist, unterscheiden. Es wird also:

$$K_1 = f(x)\, Q_1 .$$

a) Ist $f(x) = 1$, so wird $K_1 = Q_1$; hieraus folgt, daß

$$K_\mu K_{\mu-1} \ldots K_2 = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_2$$

wird. Man hat hiermit die Zerlegung eines linearen homogenen Differenzenausdruckes von niedrigerer als n^{ter} Ordnung in irreduzible Faktoren auf zwei Arten gewonnen. Für einen Differenzenausdruck niedrigerer als n^{ter} Ordnung ist der Satz als bewiesen zu betrachten. Beachtet man, daß $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ gewiß von derselben Art sind — denn K_1 ist hier gleich Q_1 —, so ist in dem betrachteten Falle unser Theorem für die Zerlegungen (1) und (2) bewiesen.

b) Ist $f(x)$ von der Einheit verschieden, so ergibt sich:

$$P = K_\mu \ldots K_3 K_2 K_1 = K_\mu \ldots K_3 K_2 f Q_1 . \tag{3}$$

Man führe die durch das Symbol K_2 ausgedrückte Operation aus und ordne nach sukzessiven Werten von Q_1; auf diese Weise erhält man:

$$K_2 f Q_1 = R Q_1 , \quad \text{also} \quad K_2(f y_x) = R(y_x). \tag{4}$$

Betrachtet man daher die beiden linearen homogenen Differenzengleichungen $K_2 = 0$ und $R = 0$, so findet man durch Multiplikation der Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen von $R = 0$ mit $f(x)$ die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen von $K_2 = 0$. Hieraus folgt, daß $K_2 = 0$ und $R = 0$ gegenseitig von derselben Art sind[1]); mithin ist auch $R = 0$ wie $K_2 = 0$ irreduzibel. Die Gleichungen (3) und (4) liefern infolge der Irreduzibilität von $R = 0$ für P die Zerlegung:

$$P = K_\mu \ldots K_3 R Q_1 \tag{5}$$

in irreduzible Faktoren. Aus (5) und (1) folgt:

$$K_\mu \ldots K_3 R = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_3 Q_2 .$$

Wir haben jetzt einen linearen homogenen Differenzenausdruck von niedrigerer als n^{ter} Ordnung in irreduzible Faktoren zerlegt. Hieraus folgt:

Man kann die Gleichungen

$$Q_\lambda = 0, \ Q_{\lambda-1} = 0, \ \ldots, \ Q_3 = 0, \ Q_2 = 0$$

den Gleichungen

$$K_\mu = 0, \ K_{\mu-1} = 0, \ \ldots, \ K_3 = 0, \ R = 0$$

in einer gewissen Reihenfolge (die anders als die hingeschriebene

1) Sie sind sogar ähnlich.

sein kann) so eindeutig zuordnen, daß zwei zugeordnete Differenzengleichungen immer von derselben Art sind. Möge der Differenzengleichung $R=0$ etwa die Gleichung $Q_0=0$ zugeordnet sein, so werden, da $R=0$ und $K_2=0$ gegenseitig von derselben Art sind, auch $Q_0=0$ und $K_2=0$ gegenseitig von derselben Art sein müssen. $K_1=0$ und $Q_1=0$ sind, da sie alle Integrale gemeinsam haben, von derselben Art. Hiermit ist unser Satz im Falle b) für die beiden Zerlegungen (1) und (2) bewiesen.

2. Haben die beiden homogenen linearen Differenzengleichungen $K_1=0$ und $Q_1=0$ kein Integral gemeinsam, so gibt es eine lineare homogene Differenzengleichung $U=0$ mit rationalen Koeffizienten, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von $K_1=0$ und $Q_1=0$ ist und welche durch alle Integrale von $K_1=0$ und $Q_1=0$ erfüllt wird. Der lineare homogene Differenzenausdruck U, das kleinste gemeinsame Vielfache[1]) von K_1 und Q_1, ist bis auf einen nur von x abhängigen Faktor völlig bestimmt und sowohl durch K_1 als auch durch Q_1 teilbar. Mithin ergibt sich:

$$U = A Q_1,$$
$$U = B K_1.$$

Bezeichnet man mit $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(l)}$ die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $Q_1=0$, mit $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ diejenigen von $K_1=0$, so hat die Differenzengleichung $U=0$ die Funktionen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(l)}; z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen. Betrachtet man die lineare homogene Differenzengleichung $A=0$, so bilden die Funktionen

$$Q_1\left(z_x^{(1)}\right), \quad Q_1\left(z_x^{(2)}\right), \ldots, Q_1\left(z_x^{(n)}\right)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von $A=0$. Folglich ist $A=0$ mit $K_1=0$ von derselben Art; da aber die beiden Differenzengleichungen offenbar dieselbe Ordnung haben, so sind $A=0$ und $K_1=0$ gegenseitig von derselben Art. Infolge der Irreduzibilität von $K_1=0$ muß mithin $A=0$ auch irreduzibel sein.

Betrachtet man ferner die lineare homogene Differenzengleichung $B=0$, so bilden für diese die Funktionen $K_1\left(y_x^{(1)}\right), K_1\left(y_x^{(2)}\right), \ldots, K_1\left(y_x^{(l)}\right)$ ein Fundamentalsystem von Integralen. Folglich ist $B=0$ mit $Q_1=0$ von derselben Art; denn $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(l)}$ sind die Elemente eines Fundamentalsystems von $Q_1=0$. Die beiden Differenzengleichungen

1) Vgl. 2. *Kap.*, VI.

$B = 0$ und $Q_1 = 0$ haben dieselbe Ordnung; daher sind sie gegenseitig von derselben Art. Infolge der Irreduzibilität von $Q_1 = 0$ muß folglich auch $B = 0$ irreduzibel sein.

Da P durch K_1 und Q_1 teilbar ist, so muß P auch durch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches U teilbar sein. Es wird daher:

$$P = VU.$$

Zerlegt man V in irreduzible Faktoren:

$$V = L_\nu L_{\nu-1} \ldots L_1,$$

und beachtet, daß

$$U = A Q_1,$$
$$U = B K_1$$

zwei Zerlegungen von U in irreduzible Faktoren sind, so findet man für P die beiden weiteren Zerlegungen:

$$P = L_\nu L_{\nu-1} \ldots L_1 A Q_1, \tag{6}$$

$$P = L_\nu L_{\nu-1} \ldots L_1 B K_1 \tag{7}$$

in irreduzible Faktoren.

Ordnet man den bei der Zerlegung (6) entstehenden Differenzengleichungen:

$$L_\nu = 0, \ L_{\nu-1} = 0, \ \ldots, \ L_1 = 0, \ A = 0, \ Q_1 = 0 \tag{8}$$

die bei der Zerlegung (7) entstehenden Differenzengleichungen in der folgenden Reihenfolge:

$$L_\nu = 0, \ L_{\nu-1} = 0, \ \ldots, \ L_1 = 0, \ K_1 = 0, \ B = 0 \tag{9}$$

zu, so sind immer zwei zugeordnete Differenzengleichungen gegenseitig von derselben Art. Da die Zerlegungen (1) und (6) beide mit Q_1 schließen, so folgt aus a), daß man den Gleichungen (8) die bei der Zerlegung (1) sich ergebenden Gleichungen in einer gewissen Reihenfolge derart eineindeutig zuordnen kann, daß zwei zugeordnete Gleichungen immer von derselben Art sind. Hierdurch wird aber auch eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Gleichungen (9) und den bei der Zerlegung (1) resultierenden Gleichungen in einer gewissen Reihenfolge vermittelt derart, daß zwei zugeordnete Gleichungen immer von derselben Art sind. Beachtet man noch, daß die Zerlegungen (2) und (7) beide mit K_1 schließen, so wird es möglich, die Gleichungen (9) durch die bei der Zerlegung (2) gewonnenen Differenzengleichungen zu ersetzen. Hierdurch hat man schließlich die verlangte Zuordnung

zwischen den aus (1) und (2) resultierenden Gleichungen. Diese Zuordnung ist eineindeutig, und zwei zugeordnete Differenzengleichungen sind immer von derselben Art.

III. Vollständige reduzible homogene lineare Differenzengleichungen.[1]

Wir haben gesehen: wenn eine lineare homogene Differenzengleichung vorgelegt ist, so kann es eine einzige, oder eine endliche Anzahl, oder unendlich viele verschiedene homogene lineare Differenzengleichungen geben, durch deren Lösungen die vorgelegte Differenzengleichung erfüllt wird. Wir werden jetzt einen neuen Begriff einführen, nämlich den der vollständig reduziblen linearen homogenen Differenzengleichung. Dieser ist insofern für unsere Theorie von Bedeutung, als zu jeder homogenen linearen Differenzengleichung eine eindeutig bestimmte größte vollständig reduzible lineare homogene Differenzengleichung gehört und diese letztere über alle irreduziblen homogenen linearen Differenzengleichungen, deren Lösungen der vorgelegten linearen homogenen Differenzengleichung genügen, Auskunft erteilt.

Wir definieren: Eine lineare homogene Differenzengleichung $V(y_x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten heißt vollständig reduzibel, wenn man von einander verschiedene irreduzible lineare homogene Differenzengleichungen $J_1(y_x) = 0$, $J_2(y_x) = 0$, ..., $J_g(y_x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten derart finden kann, daß die Ordnung der vorgelegten linearen homogenen Differenzengleichung $V(y_x) = 0$ gleich der Summe der Ordnungen von $J_1(y_x) = 0$, $J_2(y_x) = 0$, ..., $J_g(y_x) = 0$ ist und $V(y_x) = 0$ unter allen linearen homogenen Differenzengleichungen diejenige niedrigster Ordnung ist, welche durch die Integrale aller Differenzengleichungen $J_1(y_x) = 0$, $J_2(y_x) = 0$, ..., $J_g(y_x) = 0$ gleichzeitig erfüllt wird. Von der vollständig reduziblen linearen homogenen Differenzengleichung $V(y_x) = 0$ sagt man auch: sie ist das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differenzengleichungen

$$J_1(y_x) = 0, \quad J_2(y_x) = 0, \quad \ldots, \quad J_g(y_x) = 0 .$$

Eine vollständig reduzible lineare homogene Differenzengleichung kann auch auf folgende Weise, die mit der obigen gleichwertig ist, charakterisiert werden: für sie existiert wenigstens ein Fundamentalsystem von Lösungen derart, daß jedes Element dieses Fundamentalsystems auch Lösung einer *irreduziblen* linearen homogenen Differenzen-

1) *Guldberg*, **14.**

gleichung mit rationalen Koeffizienten wird, was im allgemeinen durchaus nicht der Fall zu sein braucht.[1])

Ein spezieller Fall der vollständig reduziblen linearen homogenen Differenzengleichung ist die irreduzible lineare homogene Differenzengleichung.

Nicht jede lineare homogene Differenzengleichung

$$Q(y_x) \equiv q_0(x) y_{x+m} + q_1(x) y_{x+m-1} + \cdots + q_m(x) y_x = 0$$

mit rationalen Koeffizienten ist vollständig reduzibel. Infolgedessen empfiehlt es sich, den Begriff der *größten* vollständig reduziblen linearen homogenen Differenzengleichung, die zu einer gegebenen homogenen linearen Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten gehört, einzuführen:

Ist $V(y_x) = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten, deren sämtliche Lösungen der vorgelegten linearen homogenen Differenzengleichung genügen, und existiert keine irreduzible lineare homogene Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten, deren Lösungen der Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$, aber nicht $V(y_x) = 0$ genügen, so sagen wir: $V(y_x) = 0$ ist eine *größte* vollständig reduzible lineare homogene Differenzengleichung, die zu $Q(y_x) = 0$ gehört.

Die hier gegebenen Definitionen sind ganz analog den von *Loewy* (Math. Ann. **62**, 89—117) für lineare homogene Differentialgleichungen gegebenen. Die Sätze, die sich aus diesen Definitionen herleiten lassen, sind daher den für die linearen Differentialgleichungen bestehenden Sätzen analog und lassen sich ohne Schwierigkeit beweisen. Wir geben deshalb nur die Hauptsätze ohne Beweis und verweisen auf die oben zitierte Abhandlung von Loewy.

Satz I: Zu jeder homogenen linearen Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten gibt es eine einzige wohlbestimmte zugehörige größte vollständig reduzible homogene lineare Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten.

Satz II: Eine vollständig reduzible homogene lineare Differenzengleichung ist entweder nur auf eine einzige Art oder auf unendlich viele Arten kleinstes gemeinsames Vielfache irreduzibler homogener linearer Differenzengleichungen. Notwendig und hinreichend, damit eine homogene lineare Differenzengleichung mit unendlich vielen irreduziblen homogenen linearen Differenzengleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß dies für die zu ihr gehörige größte vollständig reduzible homogene lineare Differenzengleichung zutrifft.

1) Es ist dies ein charakteristischer Unterschied gegenüber den algebraischen Gleichungen, bei denen *jede* Wurzel einer irreduktiblen Gleichung genügt

Hieraus ergeben sich noch folgende Sätze:

Satz III[1]): *Gibt es für eine reduzible homogene lineare Differenzengleichung eine einzige oder eine endliche Anzahl verschiedener irreduzibler homogener linearer Differenzengleichungen, durch deren Integrale die vorgelegte Gleichung befriedigt wird, so ist die Summe der Ordnungen dieser irreduziblen Differenzengleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung der vorgelegten Gleichung.*

Satz IV[1]): *Damit eine homogene lineare Differenzengleichung mit unendlich vielen irreduziblen homogenen linearen Differenzengleichungen Integrale gemeinsam habe, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens zwei derselben gegenseitig von derselben Art sind.*

---

1) *Guldberg*, **9.** (vgl. *Loewy*, Math. Ann. **56**, § 4).

Sechstes Kapitel.

Gruppentheorie 2. Teil. Die Rationalitätsgruppe.

I. Die Rationalitätsgruppe einer homogenen linearen Differenzengleichung.[1])

Es sei gegeben die homogene lineare Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten:

$$\text{(P)} \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0.$$

Wir bezeichnen mit $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein System von Fundamentallösungen.

Wir setzen:

$$V_x = a_x^{(1)} y_x^{(1)} + a_x^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots + a_x^{(n)} y_x^{(n)},$$

wo die a_x willkürliche rationale Funktionen von x sind. Die Funktion V_x befriedigt eine lineare homogene Differenzengleichung von der Ordnung n^2 mit rationalen Koeffizienten: Um diese Gleichung zu finden, bilden wir die sukzessiven Werte:

$$V_x, \; V_{x+1}, \; \ldots, \; V_{x+n^2},$$

ausgedrückt durch $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihre sukzessiven Werte bis $y_{x+n-1}^{(1)}, \ldots, y_{x+n-1}^{(n)}$, indem wir $y_{x+n}^{(1)}, \ldots, y_{x+n}^{(n)}, y_{x+n+1}^{(1)}, \ldots$ durch die Gleichung (P) wegschaffen. Eliminiert man zwischen diesen n^2+1 Gleichungen die $y_x^{(i)}$ und ihre sukzessiven Werte, so erhält man die gesuchte Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad V_{x+n^2} + P_x^{(1)} V_{x+n^2-1} + \cdots + P_x^{(n^2)} V_x = 0;$$

die $P_x^{(i)}$ sind rationale Funktionen von x.

Diese Gleichung hat die n^2 Lösungen

$$a_x^{(i)} y_x^{(k)} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sind die $a_x^{(i)}$ willkürlich gewählt, so sind die n^2 Lösungen linear un-

---

1) *Guldberg*, **2**, 7[b], **11**.

abhängig; denn im entgegengesetzten Fall könnte man eine Differenzengleichung bilden, der die $a_x^{(i)}$ genügen, nämlich $D(a_x^{(i)} y_x^{(k)}) = 0$, wo D die „Determinante" der n^2 Funktionen $a_x^{(i)} y_x^{(k)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ ist.

Dieses vorausgesetzt, lassen die $y_x^{(i)}$ sich rational durch V_x und seine sukzessiven Werte ausdrücken:

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} y_x^{(1)} &= \alpha_1 V_x + \alpha_2 V_{x+1} + \cdots + \alpha_{n^2} V_{x+n^2-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_x^{(n)} &= \lambda_1 V_x + \lambda_2 V_{x+1} + \cdots + \lambda_{n^2} V_{x+n^2-1}, \end{aligned}$$

wo die $\alpha, \ldots, \lambda$ rationale Funktionen von x sind.

Aus den Gleichungen (a) folgt, daß jeder Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung (A) ein System von n Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung (P) entspricht.

Dieses System muß aber nicht notwendig ein Fundamentalsystem sein. Die Bedingung dafür, daß zwischen den durch die Gleichungen (a) definierten n Lösungen der Gleichung (P) eine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten stattfindet, ist das Verschwinden der Determinante:

$$D\left(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}\right) = \left| y_{x+k}^{(i)} \right| \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Das gibt, wenn man die $y_{x+k}^{(i)}$ durch die Gleichungen (a) bestimmt, eine algebraische Differenzengleichung für V_x:

$$(\varphi)\qquad \varphi(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+m}) = 0,$$

deren Ordnung m höchstens gleich $n^2 - 1$ ist und deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Denjenigen Lösungen der Gleichung (A), die nicht auch die Gleichung (φ) befriedigen, entspricht dann vermöge der Gleichungen (a) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (P).

Ist die gegebene lineare homogene Differenzengleichung (P) ganz willkürlich gewählt, so wird im allgemeinen die Gleichung (A) keine Lösung, die der Gleichung (φ) nicht genügt, mit einer anderen Differenzengleichung niedrigerer Ordnung mit rationalen Koeffizienten gemeinsam haben.

Dagegen kann es bei spezieller Wahl der Funktionen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ vorkommen, daß die Lösungen der Gleichung (A), die der Differenzengleichung (φ) nicht genügen, doch eine algebraische Differenzengleichung von niedrigerer als der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung befriedigen.

Möge

$$\text{(f)}\qquad f(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0,$$

wo f eine ganze rationale Funktion ihrer Argumente bedeutet, die

algebraische Differenzengleichung *niedrigster* Ordnung (p) bedeuten, welche eine gemeinsame Lösung mit (A) hat, die nicht gleichzeitig der Gleichung (φ) genügt; die Gleichung (f) sei in bezug auf V_{x+p} in algebraischem Sinne irreduzibel.

Es ist zunächst klar, daß *jede* Lösung von (f), die nicht der Gleichung (φ) genügt, die Gleichung (A) befriedigen muß. Denn aus den Gleichungen (f) und (A) können wir eine neue Differenzengleichung $\psi = 0$ bilden, die höchstens von der Ordnung $p - 1$ ist, und der die gemeinsame Lösung der Gleichungen (A) und (f) genügt: Wir brauchen dabei nur mittels der Gleichung (f) und der daraus abgeleiteten Gleichungen

$$(\mathrm{f}_\lambda) \quad f(x+\lambda, V_{x+\lambda}, V_{x+\lambda+1}, \ldots, V_{x+\lambda+p}) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n^2 - p)$$

die sukzessiven Werte $V_{x+p}, V_{x+p+1}, \ldots, V_{x+n^2}$ aus der Gleichung (A) zu eliminieren. Die Gleichung $\psi = 0$ muß aber eine *Identität* sein, denn sonst wäre $f = 0$ nicht, nach der Voraussetzung, die Differenzengleichung *niedrigster* Ordnung, die mit (A) eine gemeinsame Lösung hat; d. h. jede Lösung von (f) ist eine Lösung von (A).

Es sei nun $V_x^{(1)}$ eine partikuläre Lösung der Differenzengleichung (f), und es möge derselben gemäß den Gleichungen (a) das System von Fundamentallösungen $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ der Gleichung (P) entsprechen. Sei ferner V_x eine beliebige andere Lösung von (f) und $z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)}$ das entsprechende Fundamentalsystem von (P). Dann ist

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{aligned} z_x^{(1)} &= \beta_{11} y_x^{(1)} + \cdots + \beta_{1n} y_x^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_x^{(n)} &= \beta_{n1} y_x^{(1)} + \cdots + \beta_{nn} y_x^{(n)}, \end{aligned}$$

worin die β_{ik} „Konstanten" sind.

Wir wollen die Gesamtheit der linearen Transformationen (S) betrachten, die auf diese Weise dem Übergang von einer partikulären Lösung $V_x^{(1)}$ der Gleichung (f) zu allen übrigen Lösungen oder, was auf dasselbe hinauskommt, dem Übergang zu der allgemeinen Lösung von (f) entsprechen.

Die allgemeine Lösung von (f) ist eine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung (A). Wenn wir also durch

$$u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n^2)}$$

ein Fundamentalsystem von (A) bezeichnen, so ist die allgemeine Lösung V_x von (f) in der Form

$$(1) \qquad V_x = C_1 u_x^{(1)} + \cdots + C_{n^2} u_x^{(n^2)}$$

darstellbar, wo die C_i „Konstanten" sind.

Bilden wir die sukzessiven Werte von V_x und setzen dies
drücke in die Gleichung (f) ein, so folgt aus dem Umstande,
die allgemeine Lösung von (f) ist, daß zwischen den n^2 „Konstan
eine gewisse Anzahl algebraischer Beziehungen bestehen mu
wir aber p willkürliche „Konstanten" haben, so werden die C
braische Funktionen von p willkürlichen „Konstanten" sein.

Folglich sind auch in den Substitutionen (S) die „Kons
β_{ik} algebraische Funktionen von p willkürlichen Parametern λ.

Die so erhaltenen algebraischen Relationen zwischen d
drücken aus, daß, wenn die $y_x^{(k)}$ einer willkürlichen Lösung v
entsprechen, die durch die Substitution (S) abgeleiteten $z_x^{(k)}$
anderen Lösung von (f) entsprechen.

Unter diesen Umständen ist es klar, daß, wenn man zwei
Substitutionen (S) betrachtet, die zwei verschiedenen System
Parameter λ entsprechen, das „Produkt" zweier solcher Substitu
wieder eine Substitution derselben Form ist, wo die Parameter λ
ein drittes Wertsystem bestimmt sind. Man sagt dann:

Die Substitutionen (S) *bilden eine kontinuierliche Transform
gruppe.*[1])

Wir bezeichnen diese lineare homogene Transformations
mit G und nennen sie die Rationalitätsgruppe der gegebenen li
homogenen Differenzengleichung (P).

Es gilt nun der Satz:

Jede rationale Differenzenfunktion der Elemente $[y_x]$ *eines*
mentalsystems der Differenzengleichung (P), *die gleich einer rat
Funktion von* x *ist, bleibt* **als Funktion von** x *ungeändert,
man auf die* $[y_x]$ *eine Transformation der Gruppe* G *anwende
umgekehrt: jede rationale Differenzenfunktion der* $[y_x]$, *die als F
von* x *bei der Transformation von* G *ungeändert bleibt, ist eine ra
Funktion von* x.

Es sei $R[y_x]$ eine rationale Differenzenfunktion von der v
gesetzten Beschaffenheit. Ersetzt man die $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ un

1) Es sei eine Schar von ∞^r Transformationen vorgelegt

$$\text{(a)} \qquad y_i = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r),$$

wo die f_i reguläre analytische Funktionen ihrer Argumente und die a Ko
sind. Ist die Aufeinanderfolge irgend zweier Transformationen dieser Sch
einer einzigen Transformation der Schar äquivalent, so definieren die Gleichu
eine r-gliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe.

Die Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen rührt von
Lie her. Eine eingehende Darstellung dieser Theorie findet man bei S.
F. Engel: Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888. Man v
L Schlesinger: Handbuch d. Theorie der linearen Differenzengleichungen
S. 1 ff.

sukzessiven Werte durch ihre Ausdrücke (a), so verwandelt sich $R[y_x]$, wenn für V_x eine gewisse partikuläre Lösung der Gleichung (f) genommen wird, in einen Ausdruck:

$$F(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+\nu}), \quad \nu \leqq n^2 - 1,$$

der zufolge der Voraussetzung gleich einer rationalen Funktion $g(x)$ von x ist. Dann hat die Differenzengleichung

$$\text{(F)} \qquad F(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+\nu}) = g(x)$$

mit der irreduziblen Differenzengleichung (f) eine Lösung gemeinsam; sie wird folglich durch *alle* Lösungen von (f) befriedigt, da man im entgegengesetzten Falle durch Elimination der $\nu - p + 1$ Größen V_{x+p}, $V_{x+p+1}, \ldots, V_{x+\nu}$ aus den $\nu - p + 2$ Gleichungen (F), (f), (f_λ), $(\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - p)$ zu einer Differenzengleichung $\psi = 0$ von niedrigerer Ordnung als (f) kommen würde, die mit der Gleichung (f) eine Lösung gemeinsam hat, was gegen die Voraussetzung ist. Der Ausdruck F ändert sich also nicht, d. h. er bleibt dieselbe Funktion von x, wenn man V_x durch eine beliebige andere Lösung von (f) ersetzt. Dies besagt aber nichts anderes, als daß $R[y_x]$ als Funktion von x unverändert bleibt, wenn man auf die $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ eine Transformation (S) der Gruppe G ausübt.

Sei umgekehrt die rationale Differenzenfunktion $R[y_x]$, als Funktion von x betrachtet, eine Invariante von G. Ersetzt man wieder die $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ und ihre sukzessiven Werte durch die Ausdrücke (a), wodurch sich $R[y_x]$ in F verwandelt, so stellt wegen der Unveränderlichkeit von $R[y_x]$ bei Anwendung einer Transformation von G der Ausdruck F dieselbe Funktion von x dar, welche Lösung der Gleichung (f) man auch für V_x einsetzen mag. Bedeutet μ den Grad des höchsten sukzessiven Wertes V_{x+p} in der Gleichung (f), so hat diese Gleichung für *willkürliche* Werte von

$$x, \; V_x, \; \ldots, \; V_{x+p-1}$$

μ verschiedene Wurzeln V_{x+p}.

Nun kann man mittels der Gleichungen (f) und (f_λ) $(\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - p)$ bewirken, daß F die sukzessiven Werte $V_{x+p}, V_{x+p+1}, \ldots, V_{x+\nu}$ höchstens in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält; die so reduzierte Funktion F wollen wir mit

$$\bar{F}(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+\nu}) \; (\bar{F} \text{ eine } \textit{rationale} \text{ Funktion ihrer Argumente})$$

bezeichnen. Für einen gegebenen Wert von x nimmt nach Vorstehendem $\bar{F}$ denselben Wert an, wenn für $V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+\nu}$ irgend ein diesem Wert von x entsprechendes Wertsystem gesetzt wird, welches den

Gleichungen (f) und (f_λ) ($\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - p$) genügt. Nun kann man zunächst $V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p-1}$ *willkürlich* wählen, dann aus (f) irgendeinen der zugehörigen μ Werte von V_{x+p}, ferner aus (f_1) irgendeinen der dazu gehörigen μ Werte von V_{x+p+1} usf., schließlich aus ($f_{\nu-p}$) irgend einen der zugehörigen μ Werte von $V_{x+\nu}$; für alle diese Wertsysteme nimmt $\bar{F}$ denselben Wert an. Da aber $\bar{F}$ die sukzessiven Werte $V_{x+p}, V_{x+p+1}, \ldots, V_{x+\nu}$ nur in der $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, so ist das wegen der algebraischen Irreduzibilität der Gleichung (f) nur möglich, wenn $\bar{F}$ die Größen $V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+\nu}$ überhaupt nicht mehr enthält. Es ist also $\bar{F}$ und daher auch F eine rationale Funktion von x. Q. e. d.

II. A. Reduzibilität der Rationalitätsgruppe. B. Die Rationalitätsgruppe von Differenzengleichungen derselben Art.

A. Ist die gegebene lineare homogene Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten:

$$(\mathrm{P}) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0$$

reduzibel, so existiert nach dem *5. Kap.* eine lineare homogene Differenzengleichung niedrigerer Ordnung mit rationalen Koeffizienten, etwa die folgende:

$$(\mathrm{a}) \qquad R(y_x) \equiv y_{x+\nu} + r_x^{(1)} y_{x+\nu-1} + \cdots + r_x^{(\nu)} y_x = 0,$$

deren sämtliche Lösungen auch Lösungen der gegebenen Gleichung $P(y_x) = 0$ sind.

Sei nun

$$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(\nu)}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (a), so muß durch die Rationalitätsgruppe G der gegebenen Gleichung die lineare Schar

$$(\mathrm{b}) \qquad c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \cdots + c_\nu y_x^{(\nu)}$$

in sich selbst transformiert werden; denn existierte eine Transformation von G, die eine Lösung y_x von (a) in eine Lösung y_x überführte, die nicht zu (b) gehört, so müßte die Gleichung (a) — die linke Seite $R(y_x)$ der Gleichung hat ja einen rationalen Wert (nämlich Null), bleibt also invariant bei dieser Transformation — durch y_x befriedigt werden, was unmöglich ist, d. h. die *Rationalitätsgruppe G ist reduzibel*[1].

---

1) Ist G irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen und kann man diese Gruppe durch Einführung von neuen Variablen, welche lineare homogene Kombinationen der alten Variablen mit konstanten Koeffizienten sind, so transformieren, daß sich nach der Transformation bei allen Substitutionen der transformierten Gruppe ν der neuen Variablen, wobei $\nu < n$ ist, nur linear untereinander substituieren, so heißt die Gruppe G reduzibel.

Ist umgekehrt die Rationalitätsgruppe der gegebenen Gleichung reduzibel, also etwa von der folgenden Form:

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_x^{(1)} &= c_{11} y_x^{(1)} + c_{12} y_x^{(2)} + \cdots + c_{1\nu} y_x^{(\nu)},\\
\bar{y}_x^{(2)} &= c_{21} y_x^{(1)} + c_{22} y_x^{(2)} + \cdots + c_{2\nu} y_x^{(\nu)},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\bar{y}_x^{(\nu)} &= c_{\nu 1} y_x^{(1)} + c_{\nu 2} y_x^{(2)} + \cdots + c_{\nu\nu} y_x^{(\nu)},\\
\bar{y}_x^{(\nu+1)} &= c_{\nu+1\,1} y_x^{(1)} + c_{\nu+1\,2} y_x^{(2)} + \cdots + c_{\nu+1\,\nu} y_x^{(\nu)} + c_{\nu+1\,\nu+1} y_x^{(\nu+1)} + \cdots + c_{\nu+1\,n} y_x^{(n)},\\
\bar{y}_x^{(\nu+2)} &= c_{\nu+2\,1} y_x^{(1)} + c_{\nu+2\,2} y_x^{(2)} + \cdots + c_{\nu+2\,\nu} y_x^{(\nu)} + c_{\nu+2\,\nu+1} y_x^{(\nu+1)} + \cdots + c_{\nu+2\,n} y_x^{(n)},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\bar{y}_x^{(1)} &= c_{n1} y_x^{(1)} + c_{n2} y_x^{(2)} + \cdots + c_{n\nu} y_x^{(\nu)} + c_{n\,\nu+1} y_x^{(\nu+1)} + \cdots + c_{nn} y_x^{(n)},
\end{aligned}
$$

so sind die Koeffizienten der linearen homogenen Differenzengleichung ν^{ter} Ordnung, von welcher $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(\nu)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden, invariant bei G[1]) und haben folglich einen rationalen Wert; *die gegebene Gleichung ist also reduzibel.*

Aus diesen Bemerkungen folgt: Wenn die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ von der Ordnung n reduzibel ist und daher in die Form

$$
\begin{matrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}
$$

gebracht werden kann, wobei G_{11} einen Inbegriff von Matrizes mit ν Zeilen und ν Kolonnen, G_{21} einen Inbegriff von Matrizes von $n-\nu$ Zeilen und ν Kolonnen, G_{22} einen Inbegriff von Matrizes mit $n-\nu$ Zeilen und $n-\nu$ Kolonnen, $n > n-\nu > 0$, bedeutet, so gibt es stets eine lineare homogene Differenzengleichung $R(y_x) = 0$ von der Ordnung ν mit rationalen Koeffizienten, deren sämtliche Integrale der Gleichung $P(y_x) = 0$ genügen und welche G_{11} als Rationalitätsgruppe hat.

B. Wir wenden uns jetzt zur Beziehung zwischen dem Artbegriff und der Rationalitätsgruppe einer homogenen linearen Differenzengleichung.

Es seien gegeben die beiden homogenen linearen Differenzengleichungen

$$
\begin{aligned}
&(1)\qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0,\\
&(2)\qquad Q(z_x) \equiv z_{x+m} + q_x^{(1)} z_{x+m-1} + \cdots + q_x^{(m)} z_x = 0,
\end{aligned}
\qquad (m < n),
$$

1) Vgl. 4. Kap., I.

mit rationalen Koeffizienten, und es bestehe die Beziehung

$$z_x = a_x^{(0)} y_x + \cdots + a_x^{(n-1)} y_{x+n-1} \equiv A(y_x),$$

wo die a_x rationale Funktionen der x sind.

Die Gleichung (2) ist also mit (1) von derselben Art. Ist $m = n - \nu$, so existiert eine lineare homogene Differenzengleichung ν^{ter} Ordnung mit rationalen Koeffizienten $R(y_x) = 0$, deren sämtliche Lösungen der Gleichung (1) genügen (vgl. 4. Kap., III).

Wir setzen (betreffs der Bezeichnungen vgl. 4. Kap., III):

$$t_x^{(1)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} y_x^{(l)}, \quad t_x^{(2)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} y_x^{(l)}, \quad \ldots, \quad t_x^{(\nu)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} y_x^{(l)},$$

und ferner:

$$t_x^{(\nu+1)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\,l} y_x^{(l)}, \quad t_x^{\nu+2} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+2\,l} y_x^{(l)}, \quad \ldots, \quad t_x^{(n)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{nl} y_x^{(l)};$$

hierbei bedeutet $\lambda_{kl} \begin{pmatrix} k = \nu+1, \nu+2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$ ein System von $n(n-\nu)$ willkürlichen „Konstanten", die nur der Bedingung unterworfen sind, daß die Determinante $|\lambda_{kl}|$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ von Null verschieden ist, damit die n Funktionen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ bilden; die ersten ν Funktionen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(\nu)}$ sind die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen der Differenzengleichung $R(y_x) = 0$.

Bilden wir unter Zugrundelegung des Fundamentalsystems von Lösungen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ die Rationalitätsgruppe G der Differenzengleichung $P(y_x) = 0$, so erscheint dieselbe in der Form:

$$\begin{array}{c|c} G_{11} & 0 \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array};$$

hierbei bedeutet G_{11} die Rationalitätsgruppe von $R(y_x) = 0$. Wir beweisen, daß G_{22} die Rationalitätsgruppe der Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ ist, die mit $P(y_x) = 0$ zu derselben Art gehört. Da

$$A\left(t_x^{(1)}\right) = A\left(t_x^{(2)}\right) = \cdots = A\left(t_x^{(\nu)}\right) = 0$$

ist, so folgt, daß die $n - \nu$ Funktionen

$$A\left(t_x^{(\nu+1)}\right), \ A\left(t_x^{(\nu+2)}\right), \ \ldots, \ A\left(t_x^{(n)}\right)$$

die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen von $Q(y_x) = 0$ bilden. Eine Substitution S der Rationalitätsgruppe von $P(y_x) = 0$ wird

wegen der besonderen Form der Gruppe G die Elemente $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ des Fundamentalsystems von $P(y_x) = 0$ überführen in

$$\begin{array}{l}
c_{11}\, t_x^{(1)} + c_{12}\, t_x^{(2)} + \cdots + c_{1\nu}\, t_x^{(\nu)}, \\
c_{21}\, t_x^{(1)} + c_{22}\, t_x^{(2)} + \cdots + c_{2\nu}\, t_x^{(\nu)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{\nu 1}\, t_x^{(1)} + c_{\nu 2}\, t_x^{(2)} + \cdots + c_{\nu\nu}\, t_x^{(\nu)}, \\
c_{\nu+1 1}\, t_x^{(1)} + c_{\nu+1 2}\, t_x^{(2)} + \cdots + c_{\nu+1 \nu}\, t_x^{(\nu)} + c_{\nu+1 \nu+1}\, t_x^{(\nu+1)} + \cdots + c_{\nu+1 n}\, t_x^{(n)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{n 1}\, t_x^{(1)} + c_{n 2}\, t_x^{(2)} + \cdots + c_{n \nu}\, t_x^{(\nu)} + c_{n \nu+1}\, t_x^{(\nu+1)} + \cdots + c_{n n}\, t_x^{(n)}.
\end{array}$$

Macht man davon Gebrauch, daß

$$A\left(t_x^{(1)}\right) = A\left(t_x^{(2)}\right) = \cdots = A\left(t_x^{(\nu)}\right) = 0$$

ist, so gehen durch die Substitution S die $n - \nu$ Funktionen

$$A\left(t_x^{(\nu+1)}\right), \; A\left(t_x^{(\nu+2)}\right), \; \ldots, \; A\left(t_x^{(n)}\right)$$

über in:

$$\begin{array}{l}
c_{\nu+1 \nu+1}\, A\left(t_x^{(\nu+1)}\right) + c_{\nu+1 \nu+2}\, A\left(t_x^{(\nu+2)}\right) + \cdots + c_{\nu+1 n}\, A\left(t_x^{(n)}\right), \\
c_{\nu+2 \nu+1}\, A\left(t_x^{(\nu+1)}\right) + c_{\nu+2 \nu+2}\, A\left(t_x^{(\nu+2)}\right) + \cdots + c_{\nu+2 n}\, A\left(t_x^{(n)}\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{n \nu+1}\, A\left(t_x^{(\nu+1)}\right) + c_{n \nu+2}\, A\left(t_x^{(\nu+2)}\right) + \cdots + c_{n n}\, A\left(t_x^{(n)}\right).
\end{array}$$

Bezeichnen wir die soeben hingeschriebene Substitution zwischen den Elementen:

$$A\left(t_x^{(\nu+1)}\right), \; A\left(t_x^{(\nu+2)}\right), \; \ldots, \; A\left(t_x^{(n)}\right)$$

eines Fundamentalsystems von Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ mit S_{22}, so ergibt sich infolge der besonderen Form der Gruppe G, daß die Gesamtheit der Transformationen S_{22}, welche allen Transformationen S der Rationalitätsgruppe G von $P(y_x) = 0$ entsprechen, ebenfalls eine Gruppe bildet; dies ist die Gruppe G_{22}.

Betrachtet man irgend eine rationale Differenzenfunktion von

$$A\left(t_x^{(\nu+1)}\right), \; A\left(t_x^{(\nu+2)}\right), \; \ldots, \; A\left(t_x^{(n)}\right),$$

welche einen rationalen Wert hat, so bleibt diese, als Funktion von $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ aufgefaßt, bei einer jeden Transformation S der Rationalitätsgruppe G von $P(y_x) = 0$ ihrem Wert nach ungeändert;

einer Substitution S für die n Funktionen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ entspricht aber die Substitution S_{22} für die $n-\nu$ Funktionen

$$A\left(t_x^{(\nu+1)}\right),\ A\left(t_x^{(\nu+2)}\right), \ldots, A\left(t_x^{(n)}\right);$$

daher bleibt eine jede rationale Differenzenfunktion von

$$A\left(t_x^{(\nu+1)}\right),\ A\left(t_x^{(\nu+2)}\right), \ldots, A\left(t_x^{(n)}\right),$$

welche einen rationalen Wert hat, bei allen Substitutionen der Gruppe G_{22} ihrem Wert nach ungeändert.

Wir können aber auch umgekehrt zeigen:

Bleibt eine rationale Differenzenfunktion von $A\left(t_x^{(\nu+1)}\right), \ldots, A\left(t_x^{(n)}\right)$ bei allen Substitutionen der Gruppe G_{22} ihrem Werte nach ungeändert, so ist sie eine rationale Funktion von x. Bleibt nämlich die Funktion, aufgefaßt als Funktion von $A\left(t_x^{(\nu+1)}\right), \ldots, A\left(t_x^{(n)}\right)$, bei den Substitutionen S_{22} von G_{22} ihrem Wert nach ungeändert, so bleibt sie, als Funktion von $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ bei allen Substitutionen S von G ihrem Wert nach ungeändert. Da aber G die Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ für das Fundamentalsystem $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \ldots, t_x^{(n)}$ ist, so ist die betrachtete Funktion eine rationale Funktion von x. Folglich ist die Gruppe G_{22} die Rationalitätsgruppe der Gleichung $Q(y_x) = 0$. Wir haben also den folgenden Satz:

Gehört die lineare homogene Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ von der Ordnung $m = n - \nu$ mit der linearen homogenen Differenzengleichung $P(y_x) = 0$ von der Ordnung n zu derselben Art, so kann man die Rationalitätsgruppe G von $P(y_x) = 0$ in die Form:

$$\begin{array}{cc} G_{11} & 0 \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}$$

bringen; hierbei ist G_{11} die Rationalitätsgruppe einer homogenen linearen Differenzengleichung $R(y_x) = 0$ von der ν^{ten} Ordnung, deren sämtliche Integrale der Gleichung $P(y_x) = 0$ genügen; G_{22} ist die Rationalitätsgruppe der Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$.

Für $\nu = 0$ hat man den Satz:

Zwei lineare homogene Differenzengleichungen derselben Ordnung, die von derselben Art sind, haben dieselbe Rationalitätsgruppe.

III. Reduktion der Rationalitätsgruppe: Die homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung.

Die Tragweite der *Galois*schen Theorie der algebraischen Gleichungen liegt bekanntlich darin, daß die Auflösung einer gegebenen

Gleichung wesentlich von der Struktur ihrer *Galois*schen Gruppe abhängt. In ähnlicher Weise bestimmt für eine lineare homogene Differentialgleichung oder Differenzengleichung die ihr zugehörige Rationalitätsgruppe in gewissem Sinne das bei denselben anzuwendende Lösungsverfahren.

In der *Galois*schen Theorie der algebraischen Gleichungen läßt sich indessen die *Galois*sche Resolvente und dabei die Gruppe der gegebenen Gleichung direkt bestimmen. In der Theorie der Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung liegt die Sache etwas anders.

Man kann hier nicht direkt die Rationalitätsgruppe einer gegebenen Differenzengleichung bestimmen. Man muß hier mit dem Problem anfangen, sämtliche linearen homogenen Gruppen in n Variabeln zu bestimmen, und sodann untersuchen, ob eine bestimmte Gruppe die Rationalitätsgruppe der gegebenen Gleichung ist.

Die Lösung einer vorgelegten linearen homogenen Differenzengleichung ist nun als vollzogen anzusehen, wenn derjenige Rationalitätsbereich bekannt ist, für welchen die Rationalitätsgruppe der gegebenen Differenzengleichung nur die identische Transformation enthält; denn dann sind die Elemente eines Fundamentalsystems $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ selbst rational bekannt. Es wird also darauf ankommen, den Rationalitätsbereich so zu erweitern, d. h. neue Funktionen zu adjungieren, daß sich die Rationalitätsgruppe der Differenzengleichung reduziert.

Als ein Beispiel des hier angedeuteten Lösungsverfahrens einer linearen homogenen Differenzengleichung werden wir die lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung behandeln und verweisen im übrigen auf die Abhandlung von *Guldberg*, 7 b, sowie auf die entsprechenden Untersuchungen von *Picard*[1]) und *Vessiot*[2]) über Differentialgleichungen, deren eingehende Darstellung man in dem „Handbuch" von *Schlesinger*, Bd. II, findet.

Die folgende Tabelle stellt die lineare homogene Gruppe in zwei Veränderlichen und ihre sämtlichen Untergruppen dar:

(1) $\quad \bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(1)}, \qquad \bar{y}_x^{(2)} = t_3 y_x^{(1)} + t_4 y_x^{(2)};$

(2) $\quad \bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)}, \qquad \bar{y}_x^{(2)} = t_3 y_x^{(1)} + t_4 y_x^{(2)},$

wo $t_1 t_4 - t_2 t_3 = 1$ ist;

(3) $\quad \bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, \qquad \bar{y}_x^{(2)} = t_2 y_x^{(2)} + t_3 y_x^{(1)};$

(4) $\quad \bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, \qquad \bar{y}_x^{(2)} = t_1 y_x^{(2)} + t_2 y_x^{(1)};$

---

1) Traité d'Analyse, III, 531 (Paris 1896).

2) Annales de l'Éc. Normale (3) 9 (1892), 197 ff.

$$(5)\qquad \overline{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, \qquad \overline{y}_x^{(2)} = t_2 y_x^{(2)};$$

$$(6)\qquad \overline{y}_x^{(1)} = t_1^c y_x^{(1)}, \qquad \overline{y}_x^{(2)} = t_1^{c+1}\left(y_x^{(2)} + t_2 y_x^{(1)}\right);$$

$$(7)\qquad \overline{y}_x^{(1)} = t y_x^{(1)}, \qquad \overline{y}_x^{(2)} = t y_x^{(2)};$$

$$(8)\qquad \overline{y}_x^{(1)} = y_x^{(1)}, \qquad \overline{y}_x^{(2)} = y_x^{(2)} + t y_x^{(1)};$$

$$(9)\qquad \overline{y}_x^{(1)} = t^c y_x^{(1)}, \qquad \overline{y}_x^{(2)} = t^{c+1} y_x^{(2)}.$$

Betrachten wir die allgemeine lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A)}\qquad y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0,$$

so entspricht ihr die allgemeine lineare Gruppe (1); die Gleichung (A) ist dann irreduzibel (vgl. Nr. II, A). Drei Hilfsgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der linearen homogenen Differenzengleichungen zweiter Ordnung. Es sind diejenigen, welche die Invarianten der Gruppen (2), (3) und (7) definieren.

Die Gruppe (2) — diese Gruppe ist die größte invariante Untergruppe der Gruppe (1); sie ist außerdem einfach[1]) — hat die Invariante

$$\Delta_x = y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)};$$

diese genügt der Differenzengleichung

$$\text{(a)}\qquad \Delta_{x+1} - q_x \Delta_x = 0.$$

Die Gruppe (3) hat die Invariante

$$u_x = \frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}},$$

sie genügt der Differenzengleichung:

$$\text{(b)}\qquad u_x u_{x+1} + p_x u_x + q_x = 0.$$

Die Gruppe (7) hat die Invariante

$$\eta_x = \frac{y_x^{(1)}}{y_x^{(2)}},$$

sie genügt der Differenzengleichung:

$$\text{(c)}\qquad \frac{(\eta_{x+2} - \eta_{x+1})(\eta_x - \eta_{x-1})}{(\eta_{x+2} - \eta_x)(\eta_{x+1} - \eta_{x-1})} = \frac{q_x}{p_x p_{x-1}}.\,^{2)}$$

---

1) Ist T Symbol einer beliebigen Transformation der r-gliedrigen Gruppe G, und ist S eine beliebige Transformation einer Untergruppe von G, so heißt diese Untergruppe in G invariant, wenn stets auch die Transformation $T^{-1}ST$ der betreffenden Untergruppe angehört. Eine Gruppe, die keine invariante Untergruppe besitzt, heißt einfach.

2) Vgl. Nr. IV, A d. Kap.

Sind nun die Differenzengleichungen (a) und (b) gelöst, so i
auch die gegebene Gleichung (A) gelöst. Denn es seien u_x, $u_x^{(1)}$, u_x
drei Lösungen der Gleichung (b); es gibt dann drei Lösungen de
Gleichung (A) $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, $y_x^{(1)} + y_x^{(2)}$ derart, daß

$$u_x^{(1)} = \frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}, \quad u_x^{(2)} = \frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(2)}}, \quad u_x = \frac{y_{x+1}^{(1)} + y_{x+2}^{(2)}}{y_x^{(1)} + y_x^{(2)}},$$

und außerdem

$$y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} = \Delta_x$$

ist; denn die beiden ersten Formeln definieren $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ nur bi
auf einen „konstanten“ Faktor. Wir erhalten dann:

$$\left(u_x - u_x^{(1)}\right) y_x^{(1)} + \left(u_x - u_x^{(2)}\right) y_x^{(2)} = 0,$$

$$y_x^{(1)} y_x^{(2)} \left(u_x^{(2)} - u_x^{(1)}\right) = \Delta_x,$$

und daher:

$$y_x^{(1)} = \sqrt{\frac{\left(u_x - u_x^{(2)}\right)\Delta_x}{\left(u_x - u_x^{(1)}\right)\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right)}}, \quad y_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{\left(u_x - u_x^{(1)}\right)\Delta_x}{\left(u_x - u_x^{(2)}\right)\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right)}}$$

Das Wurzelzeichen kommt daher, daß die Gruppen von Δ_x, u_x
$u_x^{(1)}$ und $u_x^{(2)}$ die gemeinsame Transformation

$$\bar{y}_x^{(1)} = -y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = -y_x^{(2)}$$

besitzen.

Es zeigt sich also bei unserem Beispiel, daß die Lösung unsere
Gleichung ausgeführt ist, *wenn wir die Invarianten spezieller Unter-
gruppen der Rationalitätsgruppe zu unserem Rationalitätsbereich ad-
jungieren.*

Es läßt sich auch allgemein zeigen, daß das Lösungsverfahre
einer linearen homogenen Differenzengleichung in der Adjunktio
neuer, durch Hilfsgleichungen (Resolventen) definierter Invariante
der Untergruppen unserer Rationalitätsgruppe besteht, wodurch dere
Reduktion auf die betreffende Untergruppe bewirkt wird. Dabei gil
der wichtige Satz, daß bei dieser Reduktion jede der auftretende
Gruppen auf ihre *invariante Untergruppe* reduziert wird (vgl. *Guld-
berg*, 7[b], Kap. II); gelangt man schließlich zu einer *einfachen* Gruppe
so kann diese daher ihrerseits nur noch auf die *„identische“* Gruppe[1])

1) Dabei ist der Begriff der identischen Gruppe in dem weiteren Sinne zu
verstehen, daß ihre Substitutionen numerisch sind, d. h. von keinem Parameter
mehr abhängen; in dem entsprechenden Rationalitätsbereiche sind die Lösungen
der vorgelegten Differenzengleichung als Wurzeln algebraischer Gleichungen be-
stimmt, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche angehören.

ziert werden; ist das der Fall, so ist die vorgelegte Differenzenhung integriert. So wird bei unserer Differenzengleichung zweiter ung (A) die allgemeine Gruppe (1) durch Adjunktion der Funk- Δ_x, die eine Invariante der „unimodularen" Gruppe (2) ist und Resolvente (a) genügt, auf eben diese Gruppe (2) reduziert; ferner einfache Gruppe (2) durch Adjunktion der Lösungen u_x der Resole (b) auf die „identische" Gruppe $\bar{y}_x^{(1)} = \pm y_x^{(1)}$, $\bar{y}_x^{(2)} = \pm y_x^{(2)}$, womit Gleichung (A) gelöst ist: in der Tat haben wir die definitive ng oben in der Form angegeben, daß $y_x^{(1)^2}$ und $y_x^{(2)^2}$ *rationale* tionen der Größen Δ_x, u_x, $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$ sind.

1. *Aufgabe.* Welche Beziehung besteht zwischen der Rationalitätspe einer linearen homogenen Differenzengleichung n^{ter} Ordnung der Gruppe ihrer $(n-m)^{\text{ten}}$ assoziierten Differenzengleichung?

2. *Aufgabe.* Wie ist die Rationalitätsgruppe beschaffen, wenn eine re homogene Differenzengleichung algebraisch integrierbar ist?

3. *Aufgabe.* Wie ist die Rationalitätsgruppe beschaffen, wenn eine re homogene Differenzengleichung durch Quadraturen, d. h. durch Kette linearer homogener Hilfsdifferenzengleichungen erster Ord- lösbar ist?

Lösung: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß homogene lineare Differenzengleichung durch Quadraturen lösbar ist die, daß ihre Rationalitätsgruppe integrabel ist, d. h. nach *ie* für eine gewisse Wahl des Fundamentalsystems die folgende n hat:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_x^{(1)} &= a_{1_1} y_x^{(1)}, \\
\bar{y}_x^{(2)} &= a_{2_1} y_x^{(1)} + a_{2_2} y_x^{(2)}, \\
\bar{y}_x^{(3)} &= a_{3_1} y_x^{(1)} + a_{3_2} y_x^{(2)} + a_{3_3} y_x^{(3)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{y}_x^{(n)} &= a_{n_1} y_x^{(1)} + a_{n_2} y_x^{(2)} + a_{n_3} y_x^{(3)} + \cdots + a_{n_n} y_x^{(n)}.
\end{aligned}$$

us ergibt sich mit Benutzung allgemeiner gruppentheoretischer e von S. Lie, daß *die allgemeine lineare Differenzengleichung n^{ter} Ord- für $n > 1$ nicht durch Quadraturen lösbar ist.* Insbesondere folgt Differenzengleichungen zweiter Ordnung, da der Ausdruck $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ als riante zur Gruppe (3) der oben angegebenen Tabelle gehört und e Gruppe alle folgenden, d. h. alle integrablen Gruppen enthält: *mit eine homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung h Quadraturen lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß für nd eine ihrer Lösungen der Ausdruck $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ rational ist.*

Beispiel: Die Gruppe der linearen homogenen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten; bei dieser ist $\frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_i$, wenn α_i eine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. (*Guldberg,* 7[b], Kap. II, Nr. 8—10; vgl. *7. Kap.*, I.)

4. *Aufgabe.* Wie kann man das Bestehen algebraischer Relationen zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Lösungen einer linearen homogenen Differenzengleichung für die Integration der Gleichung verwerten? (Vgl. IV, A d. Kap.)

5. *Aufgabe.* Wie wird die Integration der allgemeinen linearen homogenen Differenzengleichung dritter Ordnung sich durch Betrachtung ihrer Rationalitätsgruppe gestalten?

IV. Anwendungen der Theorie der Rationalitätsgruppe.

A. Algebraische Beziehungen zwischen den Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung.[1])

Während in der Theorie der Differentialgleichungen ausgedehnte Forschungen über diesen Gegenstand existieren, ist für Differenzengleichungen in dieser Beziehung noch wenig geschehen[2]), sodaß sich hier noch ein weites Feld für neue Untersuchungen eröffnet.

Besteht zunächst zwischen zwei Fundamentalintegralen η_x und ζ_x einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{x+2} = p_x y_{x+1} + q_x y_x \tag{1}$$

eine irreduktible algebraische Beziehung mit konstanten Koeffizienten:

$$F(\eta_x, \zeta_x) = 0, \quad (F \text{ ganze rationale Funktion von } \eta_x \text{ und } \zeta_x),$$

so darf F nicht homogen in η_x und ζ_x sein, da sich sonst — entgegen der Voraussetzung — der Quotient $\eta_x : \zeta_x$ als Konstante ergeben würde. Wir können diese Beziehung in der Form

$$\zeta_x = f(\eta_x) \tag{2}$$

schreiben, worin $f(\eta_x)$ eine algebraische Funktion von η_x ist; dann wird $\zeta_{x+1} = f(\eta_{x+1})$, $\zeta_{x+2} = f(\eta_{x+2})$, also mit Rücksicht auf (1):

$$f(p_x \eta_{x+1} + q_x \eta_x) - p_x f(\eta_{x+1}) - q_x f(\eta_x) = 0\,. \tag{3}$$

Die Gleichung (1) ist also jedenfalls im allgemeinen reduzibel in dem weiteren Sinne, daß die Partikularlösung η_x einer *nicht* linearen Differenzengleichung erster Ordnung genügt, deren Koeffizienten dem

1) *Wallenberg,* **1.** und **2.**

2) Der Grund liegt darin, daß bei den Differenzengleichungen eine *nicht lineare* Transformation der *unabhängigen* Veränderlichen unstatthaft ist.

Rationalitätsbereiche von (1) angehören. Wir können aber noch mehr erschließen: es ist nach dem *2. Kapitel*, III:

$$d_x = \begin{vmatrix} \eta_x & \zeta_x \\ \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \end{vmatrix} = \omega \prod (-q_x), \quad (\omega \text{ „Konstante"});$$

außer (3) besteht also noch die Gleichung:

$$\eta_x f(\eta_{x+1}) - \eta_{x+1} f(\eta_x) - d_x = 0. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich durch Elimination von η_{x+1} im allgemeinen η_x, also aus (2) auch ζ_x als *algebraische Funktion von p_x, q_x und d_x*; sind diese Größen selber algebraische Funktionen von x, so ist demnach die *allgemeine* Lösung der Gleichung (1) eine *algebraische Funktion von x*.

Dies wird nur dann nicht der Fall sein, wenn die Elimination von η_{x+1} aus den beiden Gleichungen (3) und (4) unmöglich ist. Zunächst könnte die Gleichung (3) eine *Identität* sein: das ist aber nur dann der Fall, wenn f eine *lineare* Funktion ihres Argumentes und $p_x + q_x = 1$ ist. Die Gleichung (1) besitzt in diesem Falle eine „Konstante" als Partikularlösung; es besteht daher zwischen zwei beliebigen Fundamentalintegralen η_x, ζ_x von (1) ohne weiteres die Beziehung $\zeta_x = \omega_1 \eta_x + \omega_2$; die allgemeine Lösung braucht in diesem Falle *nicht* algebraisch zu sein.

Abgesehen von diesem Falle ist die Elimination von η_{x+1} aus (3) und (4) dann und nur dann unmöglich, wenn diese beiden Gleichungen nicht unabhängig voneinander sind, d. h. wenn die Funktionaldeterminante ihrer linken Seiten verschwindet. Daraus ergibt sich durch eine eigentümliche Schlußweise, die in der Arbeit von *Waldenberg* (**1.**) nachgesehen werden möge, daß die Gleichung (1) in diesem Falle zwei *reziproke* Lösungen u_x und $v_x = \frac{1}{u_x}$ besitzt; die Bedingung dafür ergibt sich aus den Gleichungen (3) und (4):

$$\frac{1}{p_x u_{x+1} + q_x u_x} - \frac{p_x}{u_{x+1}} - \frac{q_x}{u_x} = 0$$

oder

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} + \frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1 - p_x^2 - q_x^2}{p_x q_x} = h_x$$

und

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} - \frac{u_{x+1}}{u_x} = d_x = \omega \prod (-q_x)$$

in der Form

$$h_x^2 - d_x^2 = 4$$

für einen gewissen Wert der in d_x auftretenden „Konstanten". Dann wird

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1}{2}(h_x - d_x), \quad \frac{v_{x+1}}{v_x} = \frac{u_x}{u_{x+1}} = \frac{1}{2}(h_x + d_x),$$

also

$$u_x = \prod \frac{1}{2}(h_x - d_x), \quad v_x = \prod \frac{1}{2}(h_x + d_x).$$

Die Lösungen u_x und v_x brauchen in der Tat keine algebraischen Funktionen von p_x und q_x zu sein, obwohl hier d_x eine algebraische Funktion von p_x und q_x ist $\left(d_x = \sqrt{h_x^2 - 4}\right)$.

Beispiele:

1. *d_x algebraisch.*

$$y_{x+2} - 2\frac{x+2}{x+1} y_{x+1} + \frac{x+2}{x} y_x = 0;$$

$u_x = x$, $v_x = x^2 : v_x = u_x^2$; $d_x = x(x+1)$. Die Integrale sind algebraisch.

2. *d_x transzendent.*

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 8y_x = 0;$$

$u_x = 2^x$, $v_x = 4^x : v_x = u_x^2$; $d_x = 2 \cdot 8^x$.

Die Integrale sind transzendent, aber algebraisch in d_x:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} d_x^{\frac{1}{3}}, \quad v_x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} d_x^{\frac{2}{3}}.$$

3. *Ausnahmefall:*

$$y_{x+2} - \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^2(x-1)} y_{x+1} + \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2(x-1)} y_x = 0;$$

$$h_x \equiv \frac{1-p_x^2-q_x^2}{p_x q_x} = \frac{x^2+1}{x}; \quad d_x = \frac{x^2-1}{x}; \quad h_x^2 - d_x^2 = 4; \quad \frac{h_x+d_x}{2} = x, \quad \frac{h_x-d_x}{2} = \frac{1}{x};$$

$$u_x = \prod \frac{h_x + d_x}{2} = \Gamma(x), \quad v_x = \prod \frac{h_x - d_x}{2} = \frac{1}{\Gamma(x)}; \quad v_x = \frac{1}{u_x}.$$

4. *Algebraische Integrale im Ausnahmefalle:*

$$y_{x+2} - \frac{4(x+1)^2}{(x+2)(2x+1)} y_{x+1} + \frac{x(2x+3)}{(x+2)(2x+1)} y_x = 0;$$

$$h_x = \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}; \quad d_x = \frac{2x+1}{x(x+1)}; \quad h_x^2 - d_x^2 = 4;$$

$$\frac{h_x + d_x}{2} = \frac{x+1}{x}, \quad \frac{h_x - d_x}{2} = \frac{x}{x+1};$$

$$u_x = \prod \frac{h_x + d_x}{2} = x, \quad v_x = \prod \frac{h_x - d_x}{2} = \frac{1}{x}; \quad v_x = \frac{1}{u_x}.$$

Wir haben die vorstehende Untersuchung hier der Vollständigkeit wegen aufgenommen, obwohl dieselbe noch ohne Anwendung der Gruppentheorie durchgeführt werden konnte. Jetzt wenden wir uns den homogenen linearen Differenzengleichungen *dritter* Ordnung mit einer *homogenen* Relation zweiten Grades zwischen den Fundamentalintegralen, deren Behandlung eine schöne Anwendung der Gruppentheorie gestattet. Bevor wir das eigentliche Problem in Angriff nehmen, wollen wir einige Vorbemerkungen machen[1]:

1) Die homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$u_{x+2} - P_x u_{x+1} + Q_x u_x = 0 \quad (P_x \neq 0)$$

geht durch die Substitution $u_x = \varrho_x y_x$, wenn $\frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x} = P_{x-1}$, also $\varrho_x = \prod P_{x-1}$ gesetzt wird, über in die *Normalform:*

$$y_{x+2} - y_{x+1} + q_x y_x = 0,$$

wo $q_x = \frac{Q_x}{P_{x-1} P_x}$ bei allen Transformationen $u_x = \mu_x y_x$ *invariant* ist.

2) Der Quotient zweier Fundamentalintegrale von (6), $\eta_x = \frac{y_x}{y_x^{(1)}}$, genügt, wie eine leichte Rechnung ergibt, der Differenzengleichung dritter Ordnung:

$$[illegible]$$

Dieselbe ist das Analogon der bekannten *Schwarz*schen Differentialgleichung dritter Ordnung. Für die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung (5) tritt an Stelle von q_x der invariante Ausdruck $\frac{Q_x}{P_x P_{x-1}}$. Die Form der Gleichung (7) läßt unmittelbar erkennen, daß, wenn [illegible] eine Partikularlösung der [illegible] ist, die allgemeine Lösung lautet:

$$[illegible]$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürliche [illegible] sind [illegible] auf der [illegible] Seite von (7) [illegible] η_x [illegible] η_x [illegible] ungeändert bleibt.

3) Bereits im *§ Kap.* II [illegible] Differenzengleichung dritter Ordnung [illegible]

---

1 *Wallenberg*, **2.** [illegible] **1.** [illegible]
2 Vgl. Nr. III, G. [illegible]

Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung genügen; für die Normalform (6) lautet dieselbe:

(9) $$Q(u_x) \equiv u_{x+3} + (q_{x+1} - 1) u_{x+2} - q_{x+1}(q_{x+1} - 1) u_{x+1} - q_x^2 q_{x+1} u_x = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung ist:

$$u_x = \omega_1 y_x^{(1)^2} + \omega_2 y_x^{(1)} y_x^{(2)} + \omega_3 y_x^{(2)^2},$$

worin $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ zwei Fundamentalintegrale von (6) sind und ω_1, ω_2, ω_3 willkürliche „Konstanten" bedeuten; zwischen den drei Fundamentallösungen $u_x^{(1)} = y_x^{(1)^2}$, $u_x^{(2)} = y_x^{(1)} y_x^{(2)}$, $u_x^{(3)} = y_x^{(2)^2}$ besteht die homogene quadratische Relation:

$$u_x^{(2)^2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun den folgenden Satz beweisen, welcher zeigen soll, inwieweit der zuletzt ausgesprochene Satz einer Umkehrung fähig ist: *Besteht zwischen drei Fundamentallösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung dritter Ordnung $P(v_x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten die Relation $v_x^{(2)^2} - v_x^{(1)} v_x^{(3)} = 0$, so genügen ihr die Produkte je zweier Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten Quadratwurzeln rationaler Funktionen von x sind.*[1])

Zu der gegebenen Gleichung $P(v_x) = 0$ gehört nämlich[2]) eine Untergruppe G der allgemeinen homogenen linearen Gruppe in drei Veränderlichen, die Rationalitätsgruppe, mit folgender Doppeleigenschaft: 1. Jede rationale Funktion V der Lösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}$, $v_x^{(3)}$ und ihrer sukzessiven Werte, welche eine rationale Funktion von x ist, bleibt bei allen Substitutionen von G (deren Determinanten übrigens nicht verschwinden) *numerisch*, d. h. als Funktion von x, ungeändert. 2. Jede Funktion V, die numerisch alle Transformationen von G gestattet, ist eine rationale Funktion von x.

Nun hat die rationale Funktion $V = v_x^{(2)^2} - v_x^{(1)} v_x^{(3)}$ den rationalen Wert 0, bleibt also bei allen Substitutionen der Gruppe G numerisch ungeändert, d. h. es ist auch:

$$\bar{v}_x^{(2)^2} - \bar{v}_x^{(1)} \bar{v}_x^{(3)} = 0,$$

wo

(10) $$\bar{v}_x^{(k)} = \alpha_{k_1} v_x^{(1)} + \alpha_{k_2} v_x^{(2)} + \alpha_{k_3} v_x^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3)$$

ist; darin bedeutet (α_{k_i}) irgendeine Transformation der Gruppe G, und es ist

(11) $$|\alpha_{k_i}| \neq 0 \quad (k, i = 1, 2, 3).$$

1) *Wallenberg*, **2.**, S. 58 ff. 2) Vgl. *6. Kap.*, I.

Man kann daher setzen:

$$(12)\qquad \frac{v_x^{(2)}}{v_x^{(1)}} = \frac{v_x^{(3)}}{v_x^{(2)}} = \eta_x, \quad \frac{\overline{v}_x^{(2)}}{\overline{v}_x^{(1)}} = \frac{\overline{v}_x^{(3)}}{\overline{v}_x^{(2)}} = \overline{\eta}_x.$$

Aus (10) und (12) folgt:

$$(13)\qquad \frac{\alpha_{2_1} + \alpha_{2_2}\eta_x + \alpha_{2_3}\eta_x^2}{\alpha_{1_1} + \alpha_{1_2}\eta_x + \alpha_{1_3}\eta_x^2} = \frac{\alpha_{3_1} + \alpha_{3_2}\eta_x + \alpha_{3_3}\eta_x^2}{\alpha_{2_1} + \alpha_{2_2}\eta_x + \alpha_{2_3}\eta_x^2}.$$

Sind die α_{λ_i} wirkliche Konstanten, so muß diese Gleichung eine *Identität* sein, da sich sonst η_x daraus als Konstante ergäbe gegen die Voraussetzung, daß $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, v_x^{(3)}$ ein Fundamentalsystem von $P(v_x) = 0$ bilden. Es kann auch wegen (11) nicht $\alpha_{\lambda_i} = c\alpha_{\mu_i}$ $(\lambda \neq \mu,\ i = 1, 2, 3)$ sein; daher muß sich in (13) links und rechts ein linearer Faktor in η_x fortheben, d. h. es muß sein:

$$\overline{\eta}_x = \frac{\alpha + \beta\eta_x}{\gamma + \delta\eta_x} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ Konstanten}).$$

Folglich ist:

$$(\overline{\eta}_x, \overline{\eta}_{x+1}, \overline{\eta}_{x+2}, \overline{\eta}_{x+3}) = (\eta_x, \eta_{x+1}, \eta_{x+2}, \eta_{x+3}),$$

wenn $(\eta_x, \eta_{x+1}, \eta_{x+2}, \eta_{x+3})$ das auf der linken Seite von (7) stehende anharmonische Doppelverhältnis der vier Größen $\eta_x, \eta_{x+1}, \eta_{x+2}, \eta_{x+3}$ bedeutet. Dieses Doppelverhältnis ist aber eine rationale Funktion der Lösungen $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, v_x^{(3)}$ und ihrer sukzessiven Werte, muß also, da diese bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $P(v_x) = 0$ ungeändert bleibt, eine *rationale Funktion von* x sein:

$$(7)\qquad (\eta_x, \eta_{x+1}, \eta_{x+2}, \eta_{x+3}) = q_{x+1};$$

daher ist η_x nach obigem (1. und 2. Vorbemerkung) der Quotient zweier Fundamentalintegrale $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}$ der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$(6)\qquad y_{x+2} - y_{x+1} + q_x y_x = 0.$$

Aus

$$\frac{v_x^{(2)}}{v_x^{(1)}} = \frac{v_x^{(3)}}{v_x^{(2)}} = \eta_x = \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}$$

folgt nun:

$$v_x^{(1)} = \varrho_x y_x^{(1)2}, \quad v_x^{(2)} = \varrho_x y_x^{(1)} y_x^{(2)}, \quad v_x^{(3)} = \varrho_x y_x^{(2)2};$$

die Differenzengleichung $P(v_x) = 0$ geht daher aus $Q(u_x) = 0$ (Gl. (9)) durch die Transformation $v_x = \varrho_x u_x$ hervor; wegen der Rationalität der Koeffizienten von $P(v_x) = 0$ und $Q(u_x) = 0$ muß also $\frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x}$ *eine rationale Funktion von* x sein. Setzt man andererseits in Gleichung (6)

$z_x = \sqrt{\varrho_x}\, y_x$, so erhält man diejenige homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung, von welcher die Produkte je zweier Lösungen der vorgelegten Gleichung $P(v_x) = 0$ genügen; ihre Koeffizienten sind in der Tat nach Division durch den Faktor von z_{x+2} *Quadratwurzeln rationaler Funktionen von* x.[1])

Sind dagegen die a_{k_i} nicht wirkliche Konstanten, sondern periodische Funktionen von der Periode 1, so braucht die Gleichung (13) keine Identität zu sein; es ergibt sich dann η_x aus (13) als Wurzel einer Gleichung vierten Grades, also als periodische Funktion, deren Periode höchstens gleich 4 ist.[2]) — Ist erstens η_x eine periodische Funktion von der Periode 4, so ist auch η_x^2 eine solche (deren Periode sich eventuell auf 2 reduzieren kann); die Differenzengleichung

$$P(v_x) \equiv v_{x+3} + p_x^{(1)} v_{x+2} + p_x^{(2)} v_{x+1} + p_x^{(3)} v_x = 0$$

besitzt die drei Fundamentallösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(1)} \eta_x$ und $v_x^{(1)} \eta_x^2$, hat also mit der Differenzengleichung

$$v_{x+4} - \frac{v_{x+4}^{(1)}}{v_x^{(1)}}\, v_x = 0\,,$$

deren allgemeine Lösung die Form $\omega_x v_x^{(1)}$ hat, wo ω_x eine beliebige periodische Funktion von der Periode 4 ist, ihre sämtlichen Lösungen gemeinsam; daher ist, wenn $\dfrac{v_{x+4}^{(1)}}{v_x^{(1)}} = s_x$ gesetzt wird, symbolisch:

$$v_{x+1} - s_x v_x = (v_{x+1} - r_x v_x)\,(v_{x+3} + p_x^{(1)} v_{x+2} + p_x^{(2)} v_{x+1} + p_x^{(3)} v_x)\,.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten folgt:

$$p_{x+1}^{(1)} - r_x = 0, \quad p_{x+1}^{(2)} - r_x p_x^{(1)} = 0, \quad p_{x+1}^{(3)} - r_x p_x^{(2)} = 0,$$

also:

$$p_x^{(2)} = p_x^{(1)} p_{x-1}^{(1)}; \quad p_x^{(3)} = p_x^{(1)} p_{x-1}^{(1)} p_{x-2}^{(1)}.$$

Die Gleichung $P(v_x) = 0$ geht daher durch die Transformation $v_x = \prod p_{x-2}^{(1)} \cdot u_x$ über in die Gleichung:

$$u_{x+3} + u_{x+2} + u_{x+1} + u_x = 0$$

1) Man berücksichtige, daß $\dfrac{\varrho_{x+2}}{\varrho_x} = \dfrac{\varrho_{x+2}}{\varrho_{x+1}} \cdot \dfrac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x}$ ist.

2) Ist ω_x Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Koeffizienten periodische Funktionen von der Periode 1 sind, so sind auch $\omega_{x+1}, \omega_{x+2}, \ldots, \omega_{x+n}$ Wurzeln dieser Gleichung; also muß $\omega_{x+k} = \omega_{x+l}$ $(k \leqq n,\ l < n)$ sein; d. h. ω_x besitzt höchstens die Periode n.

mit den Fundamentallösungen[1])

$$u_x^{(1)} = i^x = e^{\frac{\pi i}{2}x}, \quad u_x^{(2)} = (-1)^x = e^{\frac{2\pi i}{2}x}, \quad u_x^{(3)} = (-i)^x = e^{\frac{3\pi i}{2}x},$$

zwischen denen die Relation

$$u_x^{(2)2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0$$

besteht; ihr genügen die Produkte je zweier Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$w_{x+2} - i\sqrt{2}\, w_{x+1} - w_x = 0\ ^{2)};$$

also der Gleichung $P(v_x) = 0$ die Produkte je zweier Lösungen der Gleichung:

$$y_{x+2} - i\sqrt{2}\sqrt{p_{x-1}^{(1)}}\, y_{x+1} - \sqrt{p_{x-1}^{(1)} p_{x-2}^{(1)}}\, y_x = 0.$$

Ist zweitens η_x eine periodische Funktion von der Periode 3, so ist es auch η_x^2; die drei Fundamentallösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(1)}\eta_x$, $v_x^{(1)}\eta_x^2$ der Gleichung $P(v_x) = 0$ genügen daher sämtlich der Gleichung:

$$v_{x+3} - \frac{v_{x+3}^{(1)}}{v_x^{(1)}}\, v_x = 0,$$

d. h. es muß $p_x^{(1)} = p_x^{(2)} = 0$, $p_x^{(3)} = -\frac{v_{x+3}^{(1)}}{v_x^{(1)}}$ sein. Die Gleichung $P(v_x) = 0$ lautet also in diesem Falle:

$$v_{x+3} + p_x^{(3)} v_x = 0;\ ^{3)}$$

obwohl zwischen ihren Lösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)} = v_x^{(1)} e^{\frac{2\pi i}{3}x}$, $v_x^{(3)} = v_x^{(1)} e^{\frac{4\pi i}{3}x}$ die Relation $v_x^{(2)2} - v_x^{(1)} v_x^{(3)} = 0$ besteht, genügen ihr im allgemeinen *nicht* die Produkte je zweier Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten Quadratwurzeln rationaler Funktionen sind; die Gleichung ist aber in diesem

---

1) Vgl. 7. *Kap.*, I.

2) Vgl. S. 150, Gl. (16) für $c = -1$.

3) Dies ergibt sich auch daraus, daß hier aus (7) $q_x = 1$ folgt, sodaß die Gleichung (9), aus welcher $P(v) = 0$ durch die Transformation $v_x = \varrho_x u_x$ hervorgeht, lautet: $Q(u_x) \equiv u_{x+3} - u_x = 0$; daher braucht hier nicht $\frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x}$, sondern nur $\frac{\varrho_{x+3}}{\varrho_x}$ eine rationale Funktion von x zu sein.

Falle *keine eigentliche* Differenzengleichung dritter Ordnung[1]), sondern erster Ordnung mit der Differenz 3.

Ist endlich drittens η_x eine periodische Funktion von der Periode 2, also auch η_x^2 (und zwar darf η_x^2 sich nicht auf eine „Konstante" reduzieren, da $v_x^{(1)}$ und $v_x^{(3)} = v_x^{(1)} \eta_x^2$ Fundamentallösungen sind), so besteht zwischen den drei Lösungen 1, η_x, η_x^2 der Differenzengleichung zweiter Ordnung $y_{x+2} - y_x = 0$ eine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten, also auch zwischen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)} = v_x^{(1)} \eta_x$, $v_x^{(3)} = v_x^{(1)} \eta_x^2$, gegen die Voraussetzung, daß $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, v_x^{(3)}$ Fundamentallösungen von $P(v_x) = 0$ sind. Aus demselben Grunde darf sich auch nicht η_x selber auf eine „Konstante", d. h. auf eine periodische Funktion von der Periode 1 reduzieren; es muß dann also Gleichung (13) eine Identität sein, und es gelten die oben daraus gezogenen Schlüsse, wobei nur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jetzt nicht wirkliche Konstanten, sondern periodische Funktionen von der Periode 1 bedeuten.

Ein *Beispiel* bietet diejenige homogene lineare Differenzengleichung dritter Ordnung mit rationalen Koeffizienten

$$y_{x+3} + p_x y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0, \tag{14}$$

welche ihrer Adjungierten „ähnlich"[2]) ist, d. h. durch die Transformation $y_x = \varrho_x z_x$ in die Adjungierte[3])

$$r_{x+2} z_{x+3} + q_{x+1} z_{x+2} + p_x z_{x+1} + z_x = 0$$

übergeht.[4]) Durch Vergleichung der Koeffizienten ergibt sich

$$q_x = -c p_{x-1} p_x, \quad r_x = -c^3 p_{x-2} p_{x-1} p_x, \quad \varrho_x = \prod c^2 p_{x-2} p_x \quad (c \text{ Konstante});$$

die Gleichung (14) geht daher durch die Transformation $y_x = \prod p_{x-2} \cdot u_x$ über in die Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$u_{x+3} + u_{x+2} - c u_{x+1} - c^3 u_x = 0. \tag{15}$$

Die charakteristische Gleichung[5])

$$\alpha^3 + \alpha^2 - c\alpha - c^3 = (\alpha - c)(\alpha^2 + (c+1)\alpha + c^2) = 0$$

besitzt die Wurzeln

$$\alpha_{1,3} = -\frac{c+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c - 3c^2}, \quad \alpha_2 = c; \quad (\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2).$$

Die Lösungen von (15) lauten daher:

$$u_x^{(1)} = \alpha_1^x, \quad u_x^{(2)} = \alpha_2^x, \quad u_x^{(3)} = \alpha_3^x;$$

1) Vgl. *1. Kap.*, I 2) *4. Kap.*, III. 3) *3 Kap.*, IV, Gl. (6).
4) *Wallenberg*, **2.**, S. 61 ff. 5) *7. Kap.*, I.

zwischen denselben besteht die Relation

$$u_x^{(2)^2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0.$$

Folglich genügen nach dem oben bewiesenen Satze der Gleichung (15) die Produkte je zweier Lösungen der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$(16) \qquad v_{x+2} - \sqrt{c-1}\, v_{x+1} + c v_x = 0$$

mit den Fundamentallösungen $v_x^{(1)} = \sqrt{\alpha_1}^x$, $v_x^{(2)} = \sqrt{\alpha_2}^x$, also der Gleichung (14) die Produkte je zweier Lösungen der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$w_{x+2} - \sqrt{c-1}\sqrt{p_{x-1}}\, w_{x+1} + c\sqrt{p_{x-1}\, p_{x-2}}\, w_x = 0.$$

Die charakteristische Gleichung hat gleiche Wurzeln, wenn

$$1 + 2c - 3c^2 \equiv (1-c)(1+3c) = 0,$$

also $c = 1$ oder $c = -\frac{1}{3}$ ist; ist $c = -\frac{1}{3}$, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{3}$; die Gleichung (15) hat in diesem Falle die Lösungen[1])

$$u_x^{(1)} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x, \quad u_x^{(2)} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x x, \quad u_x^{(3)} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x x^2,$$

zwischen denen die Relation $u_x^{(2)^2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0$ besteht. Ist dagegen $c = 1$, so ist $\alpha_1 = \alpha_3 = -1$, $\alpha_2 = 1$; zwischen den Lösungen der Gleichung (15), die hier die Gestalt

$$u_{x+3} + u_{x+2} - u_{x+1} - u_x \equiv (u_{x+1} + u_x)(u_{x+2} - u_x) \equiv (u_{x+1} + u_x)^2 (u_{x+1} - u_x) = 0$$

annimmt, besteht in diesem Falle *keine* Relation der obigen Form, sondern nur, falls man $u_x^{(1)} = e^{\pi i x}$, $u_x^{(2)} = e^{\pi i x} x$, $u_x^{(3)} = e^{2\pi i x}$ wählt, die *nicht* homogene Relation $u_x^{(1)^2} - u_x^{(3)} = 0$, sodaß in diesem Ausnahmefalle der obige Satz nicht anwendbar ist.

B. Ein Reduktibilitätssatz.[2])

Es sei

$$(\mathrm{A}) \quad P(y_x) \equiv p_x^{(0)} y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n-1)} y_{x+1} + p_x^{(n)} y_x = 0$$

eine homogene lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung, und es werde ein bestimmter Rationalitätsbereich[3]) zugrunde gelegt, dem zunächst auch sämtliche „Konstanten" (periodische Funktionen von der Periode 1, die sich eventuell auf wirkliche Konstanten reduzieren können) an-

1) Vgl. 7. *Kap.*, I. 2) *Wallenberg*, **4.**
3) Vgl. 5. *Kap.*, I.

gehören mögen. Zwischen zwei linear unabhängigen Partikularlösungen $y_x^{(1)}$ und $\eta_x^{(1)}$ bestehe die Beziehung:

$$(1) \qquad \eta_x^{(1)} = A_x^{(0)} y_x^{(1)} + A_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)} + \cdots + A_x^{(\nu)} y_{x+\nu},$$

worin $A_x^{(0)}, A_x^{(1)}, \ldots, A_x^{(\nu)}$ ebenso wie die Koeffizienten von $P(y_x)$ dem Rationalitätsbereiche angehörige Funktionen von x sind und mit Rücksicht auf (A) $\nu \leqq n-1$ vorausgesetzt werden kann.[1])

Wir wählen ein bestimmtes Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A): $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(n)}$; durch diese lassen sich $y_x^{(1)}$ und $\eta_x^{(1)}$ linear mit „konstanten" Koeffizienten ausdrücken:

$$y_x^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} b_k u_x^{(k)}, \quad \eta_x^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} c_k u_x^{(k)},$$

und die Relation (1) nimmt die Form an:

$$R\left(u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}, u_{x+1}^{(1)}, \ldots, u_{x-1}^{(n)}; \ldots; u_{x+\nu}^{(1)}, \ldots, u_{x+\nu}^{(n)}\right) = 0,$$

worin R eine lineare Funktion ihrer Argumente bedeutet, deren Koeffizienten dem Bereiche angehören. Nun gehört[2]) zu (A) in bezug auf den zugrunde gelegten Rationalitätsbereich und das gewählte Fundamentalsystem eine Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe in n Veränderlichen, die sogenannte Rationalitätsgruppe, für deren sämtliche Substitutionen die Funktion R den Wert Null erhält. Durch die Substitution S_l, welche $u_x^{(i)}$ durch $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^{(l)} u_x^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzt, möge $y_x^{(1)}$ in $y_x^{(l)}$, $\eta_x^{(1)}$ in $\eta_x^{(l)}$ übergehen. Die Zahl der linear unabhängigen Lösungen $y_x^{(l)}$, welche durch die sämtlichen Substitutionen der Gruppe G erzeugt werden, kann nicht größer als n sein; ist sie kleiner als n, so ist die Gleichung (A) reduktibel, d. h. sie hat mindestens eine Lösung mit einer homogenen linearen Differenzengleichung niedrigerer als n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten dem Bereiche angehören, gemeinsam.[3]) Um die Differenzengleichung niedrigerer als n^{ter} Ordnung zu erhalten, der $y_x^{(1)}$ in diesem Falle genügt, schreiben

---

1) Ist $\eta_x^{(1)} = c y_x^{(1)}$ (c eine „Konstante"), und verschwinden nicht alle $A_x^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, \nu$) identisch, so ist $y_x^{(1)}$ eine Lösung der Differenzengleichung

$$\left(A_x^{(0)} - c\right) y_x + A_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + A_x^{(\nu)} y_{x+\nu} = 0,$$

also die Gleichung (A) ebenfalls reduktibel, falls wirklich bereits $\nu < n$.

2) *G. Kap.*, I. 3) *G. Kap*, II, A.

wir die Relation (1) mit den n ersten sukzessiven Werten von x hin und drücken $y_{x+n}^{(1)}$, $y_{x+n+1}^{(1)}$, ... mittels der gegebenen Gleichung (A) durch $y_x^{(1)}, y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+n-1}^{(1)}$ aus. Die so erhaltenen Gleichungen

$$\eta_x^{(1)} = A_x^{(0)} y_x^{(1)} + A_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)} + \cdots + A_x^{(n-1)} y_{x+n-1}^{(1)}\ ^{1)},$$
$$\eta_{x+1}^{(1)} = A_x^{(1,0)} y_x^{(1)} + A_x^{(1,1)} y_{x+1}^{(1)} + \cdots + A_x^{(1,n-1)} y_{x+n-1}^{(1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{x+n}^{(1)} = A_x^{(n,0)} y_x^{(1)} + A_x^{(n,1)} y_{x+1}^{(1)} + \cdots + A_x^{(n,n-1)} y_{x+n-1}^{(1)}$$

werden addiert, nachdem sie der Reihe nach mit $p_x^{(n)}, p_x^{(n-1)}, \ldots, p_x^{(0)}$ multipliziert worden sind; dann ergibt sich, da $\eta_x^{(1)}$ ebenfalls eine Lösung von (A) ist, für $y_x^{(1)}$ die Differenzengleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(2) \qquad R(y_x) \equiv r_x^{(0)} y_{x+n-1} + r_x^{(1)} y_{x+n-2} + \cdots + r_x^{(n-1)} y_x = 0,$$

deren Koeffizienten im allgemeinen nicht sämtlich identisch verschwinden werden.

Es sei jetzt die Zahl der linear unabhängigen Funktionen $y_x^{(i)}$ *gleich* n [2]), und zwar seien $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ n solcher Lösungen und $\eta_x^{(1)}, \eta_x^{(2)}, \ldots, \eta_x^{(n)}$ die ihnen infolge der Relation (1) entsprechenden Lösungen η_x; dann besteht also das System von Gleichungen:

$$(1^*) \qquad \eta_x^{(k)} = A_x^{(0)} y_x^{(k)} + A_x^{(1)} y_{x+1}^{(k)} + \cdots + A_x^{(n-1)} y_{x+n-1}^{(k)}.\ ^{3)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Sind die $\eta_x^{(k)}$ nicht linear unabhängig von einander, besteht also zwischen ihnen eine Relation mit „konstanten" Koeffizienten:

$$c_1 \eta_x^{(1)} + c_2 \eta_x^{(2)} + \cdots + c_n \eta_x^{(n)} = 0,$$

so erhält man, wenn

$$c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \cdots + c_n y_x^{(n)} = u_x$$

---

1) Ist in der Relation (1) $\nu < n - 1$, so ist $A_x^{(\nu+1)} = A_x^{(\nu+2)} = \cdots = A_x^{(n-1)} = 0$ zu setzen.

2) In diesem Falle genügt $y_x^{(1)}$ selbst keiner homogenen linearen Differenzengleichung niedrigerer als n^{ter} Ordnung, sodaß in Gleichung (2) sämtliche Koeffizienten $r_x^{(0)}, r_x^{(1)}, \ldots, r_x^{(n-1)}$ identisch verschwinden und daher auf diesem Wege die Reduktibilität der Gleichung (A) nicht erschlossen werden kann.

3) Die folgenden Schlüsse gelten für jedes System (1*), auch ohne daß die Lösungen $y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ aus $y_x^{(1)}$ durch Anwendung der Rationalitätsgruppe hervorgehen.

gesetzt wird, aus (1*) durch Multiplikation mit c_k und Summation über k von 1 bis n:

$$0 = A_x^{(0)} u_x + A_x^{(1)} u_{x+1} + \cdots + A_x^{(n-1)} u_{x+n-1};$$

die Gleichung (A) ist also reduktibel, da u_x eine Lösung von $P(y_x) = 0$ ist.

Sind aber die Funktionen $\eta_x^{(1)}, \eta_x^{(2)}, \ldots, \eta_x^{(n)}$ linear unabhängig, so besteht, da die Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ nach Voraussetzung ein Fundamentalsystem bilden, ein System linearer Gleichungen mit „konstanten" Koeffizienten:

$$\eta_x^{(k)} = a_{k_1} y_x^{(1)} + a_{k_2} y_x^{(2)} + \cdots + a_{k_n} y_x^{(n)},$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

also:

$$\eta_x^{(k)} - \omega y_x^{(k)} = a_{k_1} y_x^{(1)} + \cdots + (a_{k_k} - \omega) y_x^{(k)} + \cdots + a_{k_n} y_x^{(n)}.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Wir bestimmen nun ω als Wurzel der Gleichung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1_1} - \omega & a_{1_2} & \ldots a_{1_n} \\ a_{2_1} & a_{2_2} - \omega & \ldots a_{2_n} \\ \vdots & & \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \ldots a_{n_n} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

welche wir „die zur Relation (1) gehörige Grundgleichung" nennen wollen, und machen die Voraussetzung, daß die Wurzeln dieser Gleichung n^{ten} Grades in ω, deren Koeffizienten „Konstanten", d. h. im allgemeinsten Falle periodische Funktionen von der Periode 1 sein werden, selber „konstant" sind.[1] Dann kann man n „konstante" Größen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so wählen, daß die Relation

$$c_1\left(\eta_x^{(1)} - \omega y_x^{(1)}\right) + \cdots + c_n\left(\eta_x^{(n)} - \omega y_x^{(n)}\right) = 0$$

besteht; die Größen c_i genügen dem Gleichungssystem:

$$c_1 a_{1_i} + \cdots + c_n a_{n_i} = \omega c_i. \quad (i = 1, 2, \ldots, n$$

Setzt man daher

$$c_1 y_x^{(1)} + \cdots + c_n y_x^{(n)} = u_x,$$

so wird

$$c_1 \eta_x^{(1)} + \cdots + c_n \eta_x^{(n)} = \omega u_x,$$

1) Im allgemeinen sind diese Wurzeln nämlich periodische Funktionen von der Periode n (vgl. S. 147, Anm 2). — Übrigens genügt es schon, wenn *eine* Wurzel „konstant" ist. Diese Voraussetzung ist, wie später an einem Beispiel gezeigt wird, wesentlich; sie bildet einen charakteristischen Unterschied zwischen den linearen Differenzen- und Differentialgleichungen.

und man erhält aus (1*) durch Multiplikation mit c_k und Summation über k von 1 bis n:

$$(3) \qquad \omega u_x = A_x^{(0)} u_x + A_x^{(1)} u_{x+1} + \cdots + A_x^{(n-1)} u_{x+n-1},$$

also eine lineare Differenzengleichung höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche angehören und mit der die Gleichung $P(y_x) = 0$ eine Lösung gemeinsam hat.[1] Der vorhergehende Fall, daß die $\eta_x^{(k)}$ nicht linear unabhängig sind, tritt in den soeben betrachteten ein, wenn die Gleichung $\Delta = 0$ eine Wurzel $\omega = 0$ hat. — *Damit ist unter den gemachten Voraussetzungen die Reduktibilität von $P(y_x) = 0$ in allen Fällen erwiesen.*

Die auf transzendentem Wege gefundene Gleichung für ω kann man durch rationale Prozesse herstellen, indem man die Bedingung für eine gemeinsame von Null verschiedene Lösung

$$u_x = c_1 y_x^{(1)} + \cdots + c_n y_x^{(n)} \quad (y_x^{(k)} \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

von $P(y_x) = 0$ und

$$f(y_x) \equiv (A_x^{(0)} - \omega) y_x + A_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + A_x^{(n-1)} y_{x+n-1} = 0$$

aufsucht: Es ist

$$f\left(c_1 y_x^{(1)} + \cdots + c_n y_x^{(n)}\right) = c_1 f\left(y_x^{(1)}\right) + \cdots + c_n f\left(y_x^{(n)}\right) = 0,$$

folglich, wenn $f^{(k)}(y_{x+k})$ aus $f(y_x)$ dadurch hervorgeht, daß überall $x + k$ an Stelle von x geschrieben wird:

$$f^{(k)}\left(y_{x+k}^{(i)}\right) = 0. \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Nun ist unter Berücksichtigung von $P(y_x) = 0$:

$$f^{(k)}(y_{x+k}) = B_x^{(k_0)} y_x + B_x^{(k_1)} y_{x+1} + \cdots + B_x^{(k_{n-1})} y_{x+n-1},$$

worin die B_x dem Rationalitätsbereiche angehörige Funktionen von x sind, und zwar insbesondere:

$$B_x^{(0_0)} = A_x^{(0)} - \omega, \quad B_x^{(0_1)} = A_x^{(1)}, \ \ldots, \ B_x^{(0_{n-1})} = A_x^{(n-1)};$$

1) Ist in (1) $\nu = 0$, so muß, da weder $u_x = 0$ noch $A_x^{(0)} = \omega$ („Konstante") ist, $y_x^{(1)}$ selbst einer Differenzengleichung niedrigerer als n^{ter} Ordnung genügen, die man erhält, indem man $\eta_x = A_x^{(0)} y_x$ in die gegebene Gleichung (A) einsetzt und y_{x+n} mittels (A) reduziert. Ihre Koeffizienten verschwinden in der Tat nicht sämtlich, falls $P(y_x) = 0$, wie wir stillschweigend annehmen, eine *eigentliche* Differenzengleichung n^{ter} Ordnung ist, d. h. eine solche, für welche die Indizes k der nicht verschwindenden Koeffizienten $p_x^{(k)}$ den größten gemeinsamen Teiler 1 besitzen.

die Größe ω kommt nur in $B_x^{(kk)}$ in der Form $M_x^{(k)} - \omega$ vor. einem bekannten Determinantensatze wird daher:

(4) $$f^{(k)}\left(y_{x+k}^{(i)}\right) = B_x^{(kl)} \Big| \cdot \; y_{x+k}^{(i)} \cdot \quad \begin{pmatrix} k, l = 0, 1. \ldots \\ i = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Da $y_{x+k}^{(i)} \neq 0$ ist, widrigenfalls die $y_x^{(i)}$ nicht linear unabhängig wä
so muß

(5) $$B_x^{(kl)} = 0$$

sein. Diese Gleichung ist in ω vom n^{ten} Grade; der Koeffizien ω^n ist $(-1)^n$; damit ihre Wurzeln, die unter den gemachten V setzungen mit denen von $\Delta = 0$ übereinstimmen müssen, „kon werden, ist notwendig, daß die Koeffizienten der übrigen Pot von ω in $B_x^{(kl)}$ ebenfalls „Konstanten" sind.[2]) — Die Gleichun ist aber, falls ihre Wurzeln selber „konstant" sind, auch die reichende Bedingung für die Existenz gemeinsamer Lösunge $f(y_x) = 0$ und $P(y_x) = 0$; denn aus (5) folgt nach (4):

$$f^{(k)}\left(y_{x+l}^{(i)}\right) = 0,$$

und daraus nach dem Satze von *Casorati*[3]):

$$0 = c_1 f\left(y_x^{(1)}\right) + c_2 f\left(y_x^{(2)}\right) + \cdots + c_n f\left(y_x^{(n)}\right) = f\left(c_1 y_x^{(1)} + \cdots + c_n y\right.$$

worin die c_i „Konstanten" sind, die nicht sämtlich verschwinde existiert also eine Lösung $u_x = c_1 y_x^{(1)} + \cdots + c_n y_x^{(n)}$, welche die gelegte Gleichung $P(y_x) = 0$ mit $f(y_x) = 0$ gemeinsam hat.

Sind die — als „konstant" vorausgesetzten — Wurzeln $\omega_1, \omega_2,$ alle voneinander verschieden, so erhält man n Gleichungen

(6) $$\left(A_x^{(0)} - \omega_k\right) y_x + A_x^{(1)} y_{x+1} + \cdots + A_x^{(r)} y_{x+r} = 0 \quad (k = 1, 2$$

mit denen $P(y_x) = 0$ Lösungen gemeinsam hat. Ist ferner $y_x^{(k}$ von Null verschiedene Lösung, welche die k^{te} der Gleichungen (6 $P(y_x) = 0$ gemeinsam hat, so sind $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ voneinander unabhängig. Denn bestände zwischen ihnen die Beziehung

$$c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \cdots + c_n y_x^{(n)} = 0,$$

1) Satz von *Casorati*, 2. *Kap.*, I, A.

so erhielte man aus

$$\left(A_x^{(0)} - \omega_k\right) y_x^{(k)} + A_x^{(1)} y_{x+1}^{(k)} + \cdots + A_x^{(r)} y_{x+r}^{(k)} = 0$$

durch Multiplikation mit c_k und Summation über k von 1 bis n:

$$c_1 \omega_1 y_x^{(1)} + \cdots + c_n \omega_n y_x^{(n)} = 0,$$

und vermöge dieser Gleichung durch Multiplikation der vorigen mit $c_k \omega_k$ und Summation:

$$c_1 \omega_1^2 y_x^{(1)} + \cdots + c_n \omega_n^2 y_x^{(n)} = 0;$$

allgemein:

$$c_1 \omega_1^s y_x^{(1)} + \cdots + c_n \omega_n^s y_x^{(n)} = 0; \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und da wegen der Verschiedenheit der Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die Determinante $\left|\omega_k^i\right| \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$ nicht verschwindet, so muß $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ sein. Daraus folgt, daß $P(y_x) = 0$ mit keiner der Gleichungen (6) mehr als eine Lösung gemeinsam haben kann[1], da zwischen $n+1$ Lösungen von $P(y_x) = 0$ jedenfalls eine lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten bestehen muß, die nicht sämtlich verschwinden. Haben aber zwei homogene lineare Differenzengleichungen nur eine Lösung gemeinsam, so kann man diese nach dem Kettenbruchverfahren[2]) durch bloße „Quadratur" (d. h. durch Auflösung einer linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung, deren Koeffizienten dem Bereiche angehören[3])) erhalten. Die Gleichungen

$$(7) \qquad f^{(k)}(y_{x+k}) \equiv B_x^{(k_0)} y_x + B_x^{(k_1)} y_{x+1} + \cdots + B_x^{(k_{n-1})} y_{x+n-1} = 0$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

können dazu dienen, die jeder Wurzel ω der Gleichung (5) entsprechende Lösung zu ermitteln. Denn da für eine einfache Wurzel ω die Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $B_x^{(kl)}$ nicht alle gleichzeitig verschwinden können, so sind $n-1$ der Gleichungen (7) von einander unabhängig, und man erhält durch ihre Auflösung insbesondere den Quotienten $y_{x+1} : y_x$ gleich einer Funktion von x, welche dem Rationalitätsbereiche angehört. Den Fall, daß die Gleichung $\Delta = 0$ eine mehrfache Wurzel ω besitzt, behandeln wir nur in dem folgenden Beispiel und verweisen im übrigen auf die Abhandlung von *Wallenberg* (**4.**).

---

1) Dabei gelten Lösungen, die sich nur durch eine multiplikative „Konstante" unterscheiden, als nicht verschieden.

2) Vgl. *2. Kap.*, IV.

3) Vgl. *1 Kap.*, II, A.

Als Beispiel behandeln wir eine Differenzengleichung zweiter Ordnung

(B) $$P(y_x) \equiv y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0. \quad (q_x \neq 0)$$

Zwischen zwei Lösungen η_x und ξ_x derselben bestehe die Relation

(8) $$\xi_x = Q(\eta_x) \equiv A_x \eta_x + B_x \eta_{x+1},$$

worin A_x und B_x ebenso wie p_x und q_x dem Rationalitätsbereiche angehören und nicht gleichzeitig $B_x = 0$, $A_x =$ „Konst." ist. Mit Rücksicht auf (B) ergibt sich aus (8):

$$\xi_{x+1} = -q_x B_{x+1} \eta_x + (A_{x+1} - p_x B_{x+1}) \eta_{x+1},$$

$$\xi_{x+2} = -q_x(A_{x+2} - p_{x+1} B_{x+2}) \eta_x - (p_x(A_{x+2} - p_{x+1} B_{x+2}) + q_{x+1} B_{x+2}) \eta_{x+1},$$

also:

(9) $$\xi_{x+2} + p_x \xi_{x+1} + q_x \xi_x \equiv r_x \eta_x + s_x \eta_{x+1} = 0,$$

worin:

$$r_x = -q_x(A_{x+2} - p_{x+1} B_{x+2}) - p_x q_x B_{x+1} + q_x A_x,$$

$$s_x = -p_x(A_{x+2} - p_{x+1} B_{x+2}) - q_{x+1} B_{x+2} + p_x(A_{x+1} - p_x B_{x+1}) + q_x B_x$$

ist. Aus (9) folgt, daß Gleichung (B) reduktibel ist, wenn nicht gleichzeitig r_x und s_x verschwinden. Aus $r_x = 0$ ergibt sich, da $q_x \neq 0$:

$$B_{x+2} p_{x+1} - B_{x+1} p_x = A_{x+2} - A_x,$$

also:

(10) $$p_x = \frac{A_x + A_{x+1} + c_1}{B_{x+1}};$$

und aus $s_x = 0$ mit Rücksicht auf (10):

$$B_{x+2} q_{x+1} - B_x q_x = p_x(A_{x+1} - A_x) = \frac{A_{x+1}^2 - A_x^2 + c_1(A_{x+1} - A_x)}{B_{x+1}},$$

also:

(11) $$q_x = \frac{A_x^2 + c_1 A_x + c_2}{B_x B_{x+1}};$$

darin sind c_1 und c_2 willkürliche „Konstanten", d. h. periodische Funktionen von der Periode 1. Nun ist:

$$Q^2(y_x) = Q\,Q(y_x) = A_x^2 y_x + B_x(A_x + A_{x+1}) y_{x+1} + B_x B_{x+1} y_{x+2},$$

also:

$$P(y_x) = \frac{1}{B_x B_{x+1}} (Q^2(y_x) + c_1 Q(y_x) + c_2 y_x).$$

Sind die Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung

$$\omega^2 + c_1 \omega + c_2 = 0,$$

welche im allgemeinen periodische Funktionen von der Periode 2 sind, „Konstanten" (periodische Funktionen von der Periode 1), so wird:

$$P(y_x) = \frac{1}{B_x B_{x+1}} (Q(y_x) - \omega_1 y_x)(Q(y_x) - \omega_2 y_x),$$

d. h. $P(y_x)$ ist reduktibel; sind insbesondere p_x und q_x sowie A_x und B_x rationale Funktionen von x, so sind c_1 und c_2 wirkliche Konstanten, also auch ω_1 und ω_2 konstant und daher $P(y_x)$ sicher reduktibel.

Überzeugen wir uns noch, daß die Koeffizienten der Gleichung $|B_x^{(kl)}| = 0$ „konstant" werden, wenn man für p_x und q_x ihre Werte aus den Gleichungen (10) und (11) einsetzt: Wir bilden unter Berücksichtigung von (B) die Gleichungen

$$(A_x - \omega)\eta_x + B_x \eta_{x+1} = 0,$$
$$(A_{x+1} - \omega)\eta_{x+1} - B_{x+1}(p_x \eta_{x+1} + q_x \eta_x) = 0.$$

Ihre Determinante ist

$$D \equiv \begin{vmatrix} A_x - \omega & B_x \\ -q_x B_{x+1} & A_{x+1} - p_x B_{x+1} - \omega \end{vmatrix}$$

oder

$$D \equiv \omega^2 - (A_x + A_{x+1} - p_x B_{x+1})\omega + A_x A_{x+1} - p_x A_x B_{x+1} + q_x B_x B_{x+1}$$

Mit Rücksicht auf (10) und (11) wird in der Tat:

$$A_x + A_{x+1} - p_x B_{x+1} = -c_1,$$
$$A_x A_{x+1} - p_x A_x B_{x+1} + q_x B_x B_{x-1} = c_2.$$

Sind nun die Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung $D \equiv \omega^2 + c_1 \omega + c_2 = 0$ selber „konstant", so ist die Gleichung (B), wenn für p_x und q_x die Ausdrücke (10) bzw. (11) gesetzt werden, für beliebige A_x und B_x reduktibel; sie hat nämlich mit den Gleichungen

$$P_1(y_x) \equiv (A_x - \omega_1) y_x + B_x y_{x+1} = 0$$

und

$$P_2(y_x) \equiv (A_x - \omega_2) y_x + B_x y_{x+1} = 0$$

je eine Lösung gemeinsam, falls ω_2 von ω_1 verschieden ist.[1])

Ihre Lösungen sind:

$$u_x^{(1)} = C_1 \prod \frac{\omega_1 - A_x}{B_x}, \quad u_x^{(2)} = C_2 \prod \frac{\omega_2 - A_x}{B_x}.$$

Setzt man

$$\alpha_1 u_x^{(1)} + \alpha_1 u_x^{(2)} = \eta_x, \quad \omega_1 \alpha_1 u_x^{(1)} + \omega_2 \alpha_2 u_x^{(2)} = \xi_x,$$

1) Da $P_1 P_2 = P_2 P_1$, so ist direkt $P(y_x) = \frac{1}{B_x B_{x+1}} P_1 P_2(y_x)$ in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Resultat.

worin α_1 und α_2 willkürliche „Konstanten" sind, so besteht zwischen η_x und ζ_x die Relation (8):

$$\zeta_x = A_x \eta_x + B_x \eta_{x+1},$$

und man erkennt, daß η_x selber für allgemeine A_x und B_x keiner Differenzengleichung erster Ordnung genügt.

Ist $\omega_1 = \omega_2 = c\left(= -\frac{c_1}{2}\right)$, so hat die Gleichung (B) eine Lösung $u_x^{(1)}$ mit der Gleichung

$$P_1(y_x) \equiv (A_x - c) y_x + B_x y_{x+1} = 0$$

und eine zweite Lösung $u_x^{(2)}$ mit der Gleichung

$$(A_x - c) y_x + B_x y_{x+1} = u_x^{(1)}$$

gemeinsam.[1]) Die Lösungen von (B) sind hier[2]):

$$u_x^{(1)} = C_1 \prod \frac{c - A_x}{B_x}, \quad u_x^{(2)} = C_2 \prod \frac{c - A_x}{B_x} \cdot \sum \frac{1}{c - A_x}.$$

Setzt man

$$\alpha_1 u_x^{(1)} + \alpha_2 u_x^{(2)} = \eta_x, \quad (\alpha_1 c + \alpha_2) u_x^{(1)} + \alpha_2 c u_x^{(2)} = \zeta_x,$$

so erfüllen η_x und ζ_x die Relation (8).

Endlich zeigen wir noch an einem möglichst einfachen Beispiele, daß, wenn die Wurzeln ω_1 und ω_2 keine „Konstanten", sondern periodische Funktionen von der Periode 2 sind, die Gleichung (B) irreduktibel sein kann, selbst wenn man diese Wurzeln dem Bereiche adjungiert.[3]) Zu diesem Zwecke wählen wir $A_x = 0$, $B_x = 1$, dann lautet die Gleichung (B):

$$P(y_x) \equiv y_{x+2} + c_1 y_{x+1} + c_2 y_x = 0,$$

wo c_1 und c_2 „Konstanten" sind; und es sollen die Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung

$$\omega^2 + c_1 \omega + c_2 = 0$$

periodische Funktionen von der Periode 2 sein.[4]) Ist η_x eine beliebige Lösung von $P(y_x) = 0$, so ist auch η_{x+1} eine Lösung, sodaß die Re-

---

1) Auch hier ist direkt $P(y_x) = \frac{1}{B_x B_{x+1}} P_1 P_1(y_x) = \frac{1}{B_x B_{x+1}} P_1^{\,2}(y_x)$; in der Tat sind, wenn $u_x^{(1)}$ eine Lösung von $P_1(y_x) = 0$ ist, die Lösungen von $P_1 P_1(y_x) = 0$: $u_x^{(1)}$ und $u_x^{(2)}$, wo $u_x^{(2)}$ eine Lösung von $P_1(y_x) = u_x^{(1)}$ bedeutet.

2) Vgl. 3 *Kap*, V.

3) Vgl. die Schlußbemerkung dieses Abschnittes.

4) Wählt man z. B. $c_1 = -2$, $c_2 = 1 - e^{2\pi i x}$, so ist $\omega_1 = 1 + e^{\pi i x}$, $\omega_2 = 1 - e^{\pi i x}$.

lation (8) in der Tat die Form annimmt: $\zeta_x = \eta_{x+1}$. Die Lösungen ζ_x und η_x sind linear unabhängig; denn wäre $\zeta_x = c\eta_x$ (c „Konstante“), so wäre η_x eine Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $\eta_{x+1} - c\eta_x = 0$, also die Gleichung $P(y_x) = 0$ reduktibel, was, wie unten gezeigt wird, nicht der Fall ist. Als Rationalitätsbereich kann der sämtlicher „Konstanten“ gewählt werden, und wir zeigen zunächst, daß in diesem Bereiche die Gleichung $P(y_x) = 0$ irreduktibel ist. Angenommen, es sei:

$$y_{x+2} + c_1 y_{x+1} + c_2 y_x = (y_{x+1} - \alpha y_x)(y_{x+1} - \beta y_x),$$

worin β eine „Konstante“, so wäre $\alpha + \beta = -c_1$, $\alpha\beta = c_2$, d. h. α und β Wurzeln der Gleichung $\omega^2 + c_1\omega + c_2 = 0$, also nach Voraussetzung keine „Konstanten“, was unserer Annahme bezüglich β widerspricht. Aber selbst unter Adjunktion der Wurzeln ω_1 und ω_2, also periodischer Funktionen von der Periode 2, ist die Gleichung $P(y_x) = 0$ irreduktibel; es sei nämlich:

$$y_{x+2} + c_1 y_{x+1} + c_2 = (y_{x+1} - \alpha_x y_x)(y_{x+1} - \beta_x y_x),$$

worin jetzt β_x eine periodische Funktion von der Periode 2 ist; so müßte $\alpha_x + \beta_{x+1} = -c_1$, $\alpha_x\beta_x = c_2$, also $-c_1\beta_x - \beta_x\beta_{x+1} = c_2$, d. h., da $\beta_x\beta_{x+1}$ eine „Konstante“ ist, β_x selber eine „Konstante“ sein, was unserer Annahme widerspricht; also auch in diesem erweiterten Bereiche ist die Gleichung $P(y_x) = 0$ irreduktibel.

Wir haben folgenden Satz bewiesen:

Wenn zwischen zwei Fundamentallösungen $\eta_x^{(1)}$ und $y_x^{(1)}$ einer homogenen linearen Differenzengleichung (A) *die Relation* (1) *besteht, d. h. die eine Lösung ein homogener linearer Differenzenausdruck der anderen mit Koeffizienten aus dem Bereiche ist, so ist die Gleichung* (A) *reduktibel, es sei denn, daß keine Wurzel der etwa*[1]) *zur Relation* (1) *gehörigen Grundgleichung $\Delta = 0$ „konstant“ ist.*[2])

Die von *Landau* (Archiv der Math. u. Phys. (3) **10**, 45—50) in bezug auf Differentialgleichungen gemachte Bemerkung gilt auch hier: Für die Gültigkeit des oben bewiesenen Satzes ist die Zugehörigkeit sämtlicher „Konstanten“ zum Bereiche nicht erforderlich; doch gilt der Satz nicht für jeden Rationalitätsbereich, dem nicht alle „Konstanten“ angehören; so gilt er z. B. nicht für den Bereich der reellen Zahlen,

1) Wenn nämlich überhaupt keine zur Relation (1) gehörige Grundgleichung $\Delta = 0$ zustande kommt, so ist die Gleichung (A) sicher reduktibel (vgl. S. 151 ff.); in diesen Falle werden die Koeffizienten der Gleichung (5) keine „Konstanten“ sein und die Koeffizienten der Differenzengleichung (2) nicht sämtlich verschwinden

2) Diese Beschränkung fällt für den Rationalitätsbereich der rationalen Funktionen von selber fort (vgl. die Anmerkung 2) S. 155 sowie S. 158).

ıs einfache Beispiel $y_{x+2} + y_x = 0$ lehrt: zwischen den Lösungen sin $\frac{\pi}{2} x$ und $y_x^{(2)} = \cos \frac{\pi}{2} x$ besteht die Beziehung $y_x^{(2)} = y_{x+1}^{(1)}$ mit zienten aus dem Bereiche, und doch lautet die einzige Zerlegung Differenzengleichung in solche erster Ordnung mit konstanten zienten: $(y_{x+1} \pm i y_x)(y_{x+1} \mp i y_x) = 0$, worin die Koeffizienten $\pm i$ Bereiche der reellen Zahlen nicht angehören. Dagegen gilt der wie aus seinem Beweise a fortiori hervorgeht, stets, sobald die „konstant" vorausgesetzten — Wurzeln der „Grundgleichung", Koeffizienten nach obigem (S. 154ff.) dem Rationalitätsbereiche ören, dem Bereiche adjungiert werden.

ertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke.[1]

ine Anwendung findet der vorhergehende Reduktibilitätssatz bei itersuchung über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzausdrücke.

ind $P(y_x) \equiv P$ und $Q(y_x) \equiv Q$ zwei homogene lineare Differenzencke:

$$P(y_x) = p_x^{(0)} y_{x+m} + p_x^{(1)} y_{x+m-1} + \cdots + p_x^{(m)} y_x,$$

$$Q(y_x) = q_x^{(0)} y_{x+n} + q_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + q_x^{(n)} y_x,$$

leutet das symbolische Produkt PQ, daß in $P(y_x)$ an Stelle der Ausdruck $Q(y_x)$ gesetzt werden soll (vgl. *2. Kap.*, V). Für ısammensetzung linearer Differenzenausdrücke gilt zwar das tive, aber im allgemeinen nicht das kommutative Gesetz; vielmüssen die Koeffizienten von P und Q gewisse Bedingungen ı, damit dies der Fall sei. Diese Bedingungen sollen im len für Differenzenausdrücke erster und zweiter Ordnung auf- werden sowie für solche n^{ter} Ordnung mit rationalen Koeffiunter der Voraussetzung, daß einer der beiden Differenzencke irreduktibel, d. h. nicht in lineare Differenzenausdrücke erer Ordnung zerlegbar ist, deren Koeffizienten demselben alitätsbereiche angehören.

Vertauschbarkeit zweier Differenzenausdrücke erster Ordnung:

$$P = p_x^{(0)} y_{x+1} + p_x^{(1)} y_x \left(p_x^{(0)} \neq 0\right), \quad Q = q_x^{(0)} y_{x+1} + q_x^{(1)} y_x;$$

$$PQ = p_x^{(0)} q_{x+1}^{(0)} y_{x+2} + \left(p_x^{(0)} q_{x+1}^{(1)} + p_x^{(1)} q_x^{(0)}\right) y_{x+1} + p_x^{(1)} q_x^{(1)} y_x,$$

$$QP = q_x^{(0)} p_{x+1}^{(0)} y_{x+2} + \left(q_x^{(0)} p_{x+1}^{(1)} + q_x^{(1)} p_x^{(0)}\right) y_{x+1} + q_x^{(1)} p_x^{(1)} y_x.$$

[1] Wallenberg, 5.

Aus $PQ = QP$ folgt:

$$(1) \qquad \frac{q_{x+1}^{(0)}}{q_x^{(0)}} = \frac{p_{x+1}^{(0)}}{p_x^{(0)}}, \quad \text{also} \quad q_x^{(0)} = c_0 p_x^{(0)};$$

$$(2) \qquad p_x^{(0)} q_{x+1}^{(1)} + p_x^{(1)} q_x^{(0)} = q_x^{(0)} p_{x+1}^{(1)} + q_x^{(1)} p_x^{(0)},$$

also mit Berücksichtigung von (1):

$$q_{x+1}^{(1)} - q_x^{(1)} = c_0 \left(p_{x+1}^{(1)} - p_x^{(1)}\right),$$

d. h.

$$q_x^{(1)} = c_0 p_x^{(1)} + c_1;$$

c_0 und c_1 sind „Konstanten", d. h. periodische Funktionen von der Periode 1; folglich:

$$Q = c_0 P + c_1 y_x = c_0 P^1 + c_1 P^0. \text{[1]} \quad (P^0(y_x) = y_x).$$

2. Ein Differenzenausdruck zweiter Ordnung und einer erster Ordnung:

$$P = p_x^{(0)} y_{x+1} + p_x^{(1)} y_x, \quad Q = q_x^{(0)} y_{x+2} + q_x^{(1)} y_{x+1} + q_x^{(2)} y_x.$$

Aus $PQ = QP$ folgt zunächst:

$$\frac{q_{x+1}^{(0)}}{q_x^{(0)}} = \frac{p_{x+2}^{(0)}}{p_x^{(0)}}, \quad \text{also} \quad q_x^{(0)} = c_0 p_x^{(0)} p_{x+1}^{(0)}.$$

Ferner ist:

$$P^2 = PP = p_x^{(0)} p_{x+1}^{(0)} y_{x+2} + r_x^{(1)} y_{x+1} + r_x^{(2)} y_x,$$

also

$$Q - c_0 P^2 = s_x^{(0)} y_{x+1} + s_x^{(1)} y_x = S,$$

und wegen $PQ = QP$ auch $PS = SP$, und daher nach **1.**:

$$S = c_1 P^1 + c_2 P^0;$$

folglich:

$$Q = c_0 P^2 + c_1 P^1 + c_2 P^0. \text{[2]}$$

Durch eine ganz analoge Schlußweise findet man für einen linearen Differenzenausdruck n^{ter} Ordnung Q, der mit einem solchen erster Ordnung P vertauschbar ist:

$$Q = c_0 P^n + c_0 P^{n-1} + \cdots + c_n P^0.$$

---

1) An Stelle der Differenz 1 kann die beliebige Differenz h treten; die „Konstanten" sind dann periodische Funktionen von der Periode h.

2) Ist $s_x^{(0)} = 0$, so muß (wegen $PS = SP$) $s_x^{(1)} = c$ sein; es ist dann eben $c_1 = 0$.

3. Zwei Differenzenausdrücke zweiter Ordnung:

$$P = p_x^{(0)} y_{x+2} + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(2)} y_x, \quad Q = q_x^{(0)} y_{x+2} + q_x^{(1)} y_{x+1} + q_x^{(2)} y_x;$$

die Koeffizienten mögen einem gewissen Rationalitätsbereiche[1]) angehören.

Aus $PQ = QP$ folgt zunächst durch Vergleichung der Koeffizienten von y_{x+4}:

$$\frac{q_{x+2}^{(0)}}{q_x^{(0)}} = \frac{p_{x+2}^{(0)}}{p_x^{(0)}}, \quad \text{also} \quad q_x^{(0)} = \alpha_x p_x^{(0)},$$

worin α_x eine periodische Funktion von der Periode 2 ist, die sich jedoch auf eine solche von der Periode 1, d. h. auf eine „Konstante" reduzieren kann. Es ist hier ein wesentlicher Unterschied gegenüber den entsprechenden Differentialausdrücken zu konstatieren, bei denen die Koeffizienten der zweiten Ableitung sich *nur* durch eine Konstante unterscheiden können. Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden:

a) α_x *ist eine periodische Funktion von der Periode* 1: $\alpha_{x+1} = \alpha_x$, $\alpha_x = c$. Dann ist

$$P - \frac{1}{c} Q = r_x^{(0)} y_{x+1} + r_x^{(1)} y_x = R,$$

also wegen $PQ = QP$ auch $RQ = QR$ und daher nach **2.**:

$$Q = c_0 R^2 + c_1 R^1 + c_2 R^0,$$
$$P = \frac{1}{c} Q + R = d_0 R^2 + d_1 R^1 + d_2 R^0 \quad (d_0, d_1, d_2 \text{ „Konstanten"}).$$

Da an Stelle von R allgemeiner $mR^1 + nR^0$ (m, n „Konstanten") gesetzt werden kann, so sind c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2 willkürliche „Konstanten". Daß die so gefundenen Ausdrücke P und Q wirklich miteinander vertauschbar sind, leuchtet ohne weiteres ein.

Ist $r_x^{(0)} = 0$, so folgt aus $QR = RQ$ oder $Q(r_x^{(1)} y_x) = r_x^{(1)} Q(y_x)$, daß $r_x^{(1)} = c'$ sein muß, falls P und Q *eigentliche* Differenzenausdrücke zweiter Ordnung sind, d. h. solche, die außer y_{x+2} und y_x auch wirklich y_{x+1} enthalten (enthalten sie nämlich *nicht* y_{x+1}, so sind sie eigentlich Differenzenausdrücke *erster* Ordnung, nur daß überall die Differenz 2 ist, also auch die „Konstanten" periodische Funktionen von der Periode 2 sind; vgl. die Anmerkung in **1.**). Es ist dann also

$$P = \frac{1}{c} Q + c' y_x.$$

b) α_x *ist eine periodische Funktion von der Periode* 2: $\alpha_{x+2} = \alpha_x$.

Die direkte Gleichsetzung der Koeffizienten von PQ und QP führt auf nicht lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung; dieselben

---

1) Vgl. 5. *Kap*, I.

sind aber durch rationale Prozesse lösbar, falls man die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zweimal anwendet: Es sei nämlich η_x eine beliebige Lösung von $Q(y_x) = 0$, die keiner homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit Koeffizienten aus dem Bereiche genügt, also

$$QP(\eta_x) = PQ(\eta_x) = 0,$$

dann ist auch $\zeta_x = P(\eta_x)$ eine Lösung von $Q(y_x) = 0$.

Es ist aber

$$\overline{Q} = \frac{Q}{\alpha_x} = p_x^{(0)} y_{x+2} + \overline{q}_x^{(1)} y_{x+1} + \overline{q}_x^{(2)} y_x, \quad \overline{Q}(\eta_x) = 0;$$

also

$$\zeta_x = P(\eta_x) - \overline{Q}(\eta_x) = R(\eta_x) = r_x^{(0)} \eta_{x+1} + r_x^{(1)} \eta_x.$$

Daher ist nach den Ergebnissen von **B** (siehe das Beispiel):

$$\overline{Q} = \frac{p_x^{(0)}}{r_x^{(0)} r_{x+1}^{(0)}} (R^2 + c_1 R^1 + c_2 R^0).$$

Ferner ist:

$$(1) \quad P(y_x) = \overline{Q}(y_x) + R(y_x), \quad Q(y_x) = \alpha_x \overline{Q}(y_x) = \frac{\alpha_x p_x^{(0)}}{r_x^{(0)} r_{x+1}^{(0)}} (R^2 + c_1 R^1 + c_2 R^0).$$

Andererseits sei u_x eine Lösung von $P(y_x) = 0$, also

$$PQ(u_x) = QP(u_x) = 0;$$

dann ist auch

$$v_x = \alpha_x P(u_x) - Q(u_x) = \alpha_x R(u_x)$$

eine Lösung von $P(y_x) = 0$ und daher nach Früherem:

$$(2) \qquad P(y_x) = \frac{p_x^{(0)}}{\alpha_x \alpha_{x+1} r_x^{(0)} r_{x+1}^{(0)}} [(\alpha_x R)^2 + d_1 \alpha_x R + d_2 y_x].$$

Vergleicht man die beiden so gewonnenen Ausdrücke (1) und (2) von P, so erhält man durch Gleichsetzung der Koeffizienten von y_{x+1}:

$$(3) \qquad p_x^{(0)} = \frac{\alpha_{x+1} r_x^{(0)} r_{x+1}^{(0)}}{(\alpha_x - \alpha_{x+1}) r_x^{(1)} - c_1 \alpha_{x+1} + d_1}.$$

Ferner ergibt sich durch Gleichsetzung der Koeffizienten von y_x unter Berücksichtigung von (3):

$$d_2 = \alpha_x \alpha_{x+1} c_2 \quad (\alpha_x \alpha_{x+1} \text{ ist eine „Konstante"}).$$

Die endgültigen Ausdrücke für P und Q lauten also:

$$P = \frac{1}{\alpha_x[(\alpha_x - \alpha_{x+1}) r_x^{(1)} - c_1 \alpha_{x+1} + d_1]} [(\alpha_x R)^2 + d_1 \alpha_x R + c_2 \alpha_x \alpha_{x+1} y_x],$$

$$Q = \frac{\alpha_x \alpha_{x+1}}{(\alpha_x - \alpha_{x+1}) r_x^{(1)} - c_1 \alpha_{x+1} + d_1} (R^2 + c_1 R + c_2 y_x);$$

darin ist $R = r_x^{(0)} y_{x+1} + r_x^{(1)} y_x$; $r_x^{(0)}$ und $r_x^{(1)}$ sind willkürliche Funktionen von x, ferner c_1, c_2, d_1 willkürliche „Konstanten" und α_x eine willkürliche periodische Funktion von der Periode 2 $(\alpha_{x+2} = \alpha_x)$.

Beispiel:

$$r_x^{(0)} = 1, \quad r_x^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{e^{\pi i x}}{x}, \quad \text{also} \quad R = y_{x+1} - \frac{1}{2}\frac{e^{\pi i x}}{x} y_x;$$

$$\alpha_x = e^{\pi i x}; \quad c_1 = c_2 = d_1 = 0, \quad \text{also} \quad p_x^{(0)} = e^{-\pi i x} x;$$

$$Q = x R^2 = x y_{x+2} - \frac{1}{2}\frac{e^{\pi i x}}{x+1} y_{x+1} + \frac{1}{4}\frac{e^{2\pi i x}}{x} y_x;$$

$$P = \overline{Q} + R = e^{-\pi i x} x y_{x+2} + \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x+1} y_{x+1} - \frac{1}{4}\frac{e^{\pi i x}}{x} y_x.$$

Es ist noch der Fall $r_x^{(0)} = 0$ zu erledigen: Da $\xi_x = R(\eta_x) = r_x^{(1)} \eta_x$ eine Lösung von $Q(y_x) = 0$ ist, so ist auch $P(\xi_x) = R(\xi_x) = r_x^{(1)^2} \eta_x$ eine Lösung von $Q(y_x) = 0$. Zwischen den drei Lösungen $\eta_x, r_x^{(1)} \eta_x, r_x^{(1)^2} \eta_x$ besteht aber eine lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten:

$$c_0 \eta_x + c_1 r_x^{(1)} \eta_x + c_2 r_x^{(1)^2} \eta_x = 0,$$

also, da $\eta_x \neq 0$:

$$c_0 + c_1 r_x^{(1)} + c_2 r_x^{(1)^2} = 0;$$

daher ist $r_x^{(1)} = \varepsilon_x$ eine periodische Funktion von der Periode 2 [1] $(\varepsilon_{x+2} = \varepsilon_x)$, die sich auf eine solche von der Periode 1, d. h. auf eine „Konstante" reduzieren kann. Dann ist

$$P = \overline{Q} + \varepsilon_x y_x, \quad Q = \alpha_x \overline{Q}.$$

Aus $QP = PQ$ folgt:

$$\alpha_x \overline{Q}^2 + \alpha_x \varepsilon_x \overline{Q} + \alpha_x(\varepsilon_{x+1} - \varepsilon_x)\bar{q}_x^{(1)} y_{x+1} = \alpha_x \overline{Q}^2 + (\alpha_{x+1} - \alpha_x) q_x^{(1)} \overline{Q}_{x+1} + \alpha_x \varepsilon_x \overline{Q}$$

oder

$$\bar{q}_x^{(1)} [\alpha_x(\varepsilon_{x+1} - \varepsilon_x) y_{x+1} - (\alpha_{x+1} - \alpha_x) \overline{Q}_{x+1}] = 0;$$

also entweder $\bar{q}_x^{(1)} = 0$: dann sind, da auch $p_x^{(1)} = 0$, wenn $r_x^{(0)} = 0$ und $q_x^{(1)} = 0$, P und Q keine eigentlichen linearen Differenzenausdrücke zweiter Ordnung. In der Tat sind zwei Ausdrücke

$$P = p_x^{(0)} y_{x+2} + p_x^{(2)} y_x \quad \text{und} \quad Q = \alpha P + \varepsilon y_x,$$

wo α und ε periodische Funktionen von der Periode 2 sind, miteinander vertauschbar (vgl. **1.**, Anmerkung). Oder es ist $q_x^{(1)} \neq 0$: dann müßte jedenfalls, da $\overline{Q}_{x+1}$ auch y_{x+3} enthält, $\alpha_{x+1} = \alpha_x$ und daher

1) Aus $c_0 + c_1 r_x^{(1)} + c_2 r_x^{(1)^2} = 0$ folgt nämlich $c_0 + c_1 r_{x+1}^{(1)} + c_2 r_{x+1}^{(1)^2} = 0$ und durch Subtraktion $c_1(r_{x+1}^{(1)} - r_x^{(1)}) + c_2(r_{x+1}^{(1)^2} - r_x^{(1)^2}) = 0$; also entweder $r_{x+1}^{(1)} = r_x^{(1)}$ oder $r_{x+1}^{(1)} + r_x^{(1)} = -\frac{c_1}{c_2}$ und daher auch $r_{x+2}^{(1)} + r_{x+1}^{(1)} = -\frac{c_1}{c_2}$, folglich $r_{x+2}^{(1)} = r_x^{(1)}$.

auch $\varepsilon_{x+1} = \varepsilon_x$ sein; das wäre aber der Fall 3., a). Ist also erst $\alpha_{x+2} = \alpha_x$, so kann für *eigentliche* Differenzenausdrücke zweiter Ordnung der Fall $r_x^{(0)} = 0$ garnicht eintreten.

4. Endlich soll allgemein die Vertauschbarkeit zweier homogener linearer Differenzenausdrücke, deren Koeffizienten rationale Funktionen sind, unter der Voraussetzung untersucht werden, daß einer derselben irreduktibel ist: Es seien zwei homogene lineare Differenzenausdrücke mit rationalen Koeffizienten, P von der Ordnung p und Q von der Ordnung $q (p \geqq q)$, miteinander vertauschbar: $PQ = QP$, und es werde Q als irreduktibel vorausgesetzt. Die Differenzengleichung $Q(y_x) = 0$ möge die Lösung η_x besitzen. Da $QP(\eta_x) = PQ(\eta_x) = 0$ ist, so besitzt die Gleichung $Q(y_x) = 0$ auch die Lösung $\zeta_x = P(\eta_x)$. Wäre nun ζ_x linear unabhängig von η_x, so müßte nach dem vorher bewiesenen Satze (B.) die Gleichung $Q(y_x) = 0$ reduktibel sein, entgegen der Voraussetzung; folglich muß $\zeta_x = c_0 \eta_x$ sein (c_0 eine „Konstante"). Daher hat die Differenzengleichung $P(y_x) - c_0 y_x = 0$ mit $Q(y_x) = 0$ die Lösung η_x, also wegen der Irreduktibilität von $Q(y_x) = 0$ nach einem früheren Satze (5. Kap., I) *alle* Lösungen gemeinsam; folglich ist:

$$P(y_x) - c_0 y_x = R\,Q(y_x) \quad \text{oder} \quad P(y_x) = R\,Q(y_x) + c_0 y_x .$$

Ferner ist

$$PQ = RQQ + c_0 Q, \quad QP = QRQ + c_0 Q,$$

also wegen $PQ = QP$:

$$RQQ = QRQ, \quad \text{d. h.} \quad RQ = QR.$$

Daher ergibt sich durch dieselbe Schlußweise wie oben:

$$R = SQ + c_1 y_x, \quad S = TQ + c_2 y_x \quad \text{usf.}$$

Schließlich kommt man zu einem Differenzenausdruck Z von kleinerer Ordnung als Q, und es muß $Z - c_n y_x = 0$ mit $Q = 0$ alle Lösungen gemeinsam haben, also $Z - c_n y_x$ *identisch* verschwinden oder $Z \equiv c_n y_x (c_n \neq 0)$ sein. Daraus folgt, daß $p = nq$ und

$$P = c_n Q^n + c_{n-1} Q^{n-1} + \cdots + c_1 Q^1 + c_0 Q^0$$

ist. Offenbar ist diese Bedingung für die Vertauschbarkeit von P und Q auch hinreichend, selbst dann, wenn Q reduktibel ist. — Da Differenzenausdrücke erster Ordnung als irreduktibel anzusehen sind, so folgt für $q = 1$ der am Schlusse von **2.** angegebene Satz über die Vertauschbarkeit eines linearen Differenzenausdruckes erster und eines solchen n^{ter} Ordnung. Ferner folgt, falls auch P irreduktibel, also $n = 1$ ist, daß in zwei vertauschbaren irreduktiblen Differenzenausdrücken, abgesehen von einer multiplikativen „Konstanten", nur die Koeffizienten von y_x sich um eine additive „Konstante" unterscheiden, analog den linearen Differenzenausdrücken erster Ordnung.

ZWEITER TEIL

INTEGRATION DER LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN DURCH ANALYTISCHE AUSDRÜCKE



Die Untersuchungen über die Darstellung der Lösungen linearer Differenzengleichungen durch analytische Ausdrücke sind — mit Ausnahme einiger Differenzengleichungen erster und zweiter Ordnung sowie der Gleichungen mit konstanten und linearen Koeffizienten — ganz neuen Datums und stecken zum Teil noch in den Anfängen. Wir werden in diesem Kapitel die wichtigsten dieser Untersuchungen, soweit sie für ein Lehrbuch reif sind, auseinandersetzen, beschränken uns aber auch hier *im allgemeinen* (bis auf das letzte Kapitel) auf den Fall, daß die unabhängige Veränderliche reell ist[1]), und daß (bis auf das *9. Kap.* und das *10. Kap.*, IV) die Koeffizienten rationale Funktionen sind. — Ferner werden wir auf die in England beliebten symbolischen Methoden verzichten, da der zur Aufstellung ihrer Grundformeln und deren strenger Begründung nötige Aufwand die durch sie gewährten Rechenvorteile überwiegt, und verweisen dafür auf das Lehrbuch von *Boole* (**1.**).

Siebentes Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.[2])

I. Homogene Gleichungen.

Es sei die homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \qquad P(y_x) = y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \cdots + a_n y_x = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

vorgelegt. Setzt man

$$y_x = r^x u_x,$$

worin r eine Konstante, u_x eine Funktion von x ist, und berücksichtigt die Formel[3])

---

1) Dagegen dürfen die Koeffizienten der Differenzengleichung komplexe Größen enthalten.

2) *Lagrange* **1.** u. **2.**, S. 152—155 (vgl. *Lacroix*, **1.**; *Boole*, **1.**; *Markoff*, **1.**; *Seliwanoff*, **2.**).

3) Vgl. 1. Kap., I.

(2) $y_{x+k} = r^{x+k}\Big(u_x$ [illegible] $k\Delta u$ [illegible] Δ [illegible] $k = 1, 2, \ldots, n$

so erhält man, wenn noch die [illegible] *Funktion*

(3) [illegible]

eingeführt wird:

(4) $P(r^x u_x)$ [illegible] $r^x f(r)\, u$ [illegible] Δ [illegible] Δ [illegible]

[illegible]

Die rechte Seite von [illegible] verschwindet, [illegible] eine Wurzel der *„charakteristischen Gleichung"* [illegible] P [illegible] $f(r)$; daher ist $y_x = r_i^x$ eine Partikulärlösung [illegible]

Sind die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots$ [illegible] Gleichung alle von einander verschieden, so [illegible] Lösung von [illegible]:

$$y_x = \omega_1 r_1^x + \ldots + \omega_n r_n^x,$$

worin die ω_k „Konstanten" bedeuten [illegible] bilden nämlich ein Fundamentalsystem von [illegible]

(5) D [illegible] r^{x+k-1} [illegible]

ist. — Soll im Intervall [illegible] $q(x)$ sein, worin $q(x)$ eine vorgegebene [illegible] stehen für $0 \leq x < 1$ die Gleichungen

$$\omega_1 r_1^{x+k} + \omega_2 r_2 \ldots$$ [illegible]

Um die „Konstanten" ω daraus zu [illegible] wir die k^{te} Gleichung mit einem noch [illegible] und addieren; dann erhalten wir, wenn [illegible]

$$\sum$$ [illegible]

gesetzt wird:

$$\omega_1 r_1^x f_i(r_1) + \omega_2 r_2^x f_i(r_2) + \ldots \quad \sum$$ [illegible]

wählen wir nun die λ [illegible] $i = 1, 2, \ldots$ [illegible]

$r_{i+1}, \ldots, r_n$ verschwindet, also [illegible]

und es ergibt sich:

$$\omega_i r_i^x \ldots \sum$$ [illegible]

Die Funktionen $\omega_i(x)$ sind hierdurch im Intervall $0 \leqq x < 1$ und daher als periodische Funktionen von der Periode 1 bei geeigneter Wahl von $\varphi(x)$ für *alle* Werte von x bestimmt.[1])

Ist dagegen r eine μ-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung, so wird die rechte Seite von (4):

$$\frac{1}{\mu!} r^{x+\mu} f^{(\mu)}(r) \Delta^\mu u_x + \frac{1}{(\mu+1)!} r^{x+\mu+1} f^{(\mu+1)}(r) \Delta^{\mu+1} u_x + \cdots + \frac{1}{n!} r^{x+n} f^{(n)}(r) \Delta^n u_x;$$

dieser Ausdruck verschwindet, wenn u_x eine *beliebige* ganze Funktion höchstens $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist; daraus folgt, daß

$$r^x,\ x r^x,\ x^2 r^x,\ \ldots,\ x^{\mu-1} r^x$$

Partikularlösungen von (1) sind; also[2]): *Einer μ-fachen Wurzel der charakteristischen Gleichung entspricht eine μ-fache Lösung der Gleichung* (1).

Wir betrachten den extremen Fall, daß *alle* Wurzeln der charakteristischen Gleichung einander gleich sind; in diesem Falle besitzt die Gleichung (1) die n Lösungen

$$r^x,\ x r^x,\ x^2 r^x,\ \ldots,\ x^{n-1} r^x;$$

dieselben bilden ein Fundamentalsystem, da eine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten

$$\omega_1 r^x + \omega_2 x r^x + \cdots + \omega_n x^{n-1} r^x = 0$$

wegen $r \neq 0$

$$\omega_1 + \omega_2 x + \cdots + \omega_n x^{n-1} = 0$$

für jeden Wert von x, also

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_n = 0$$

nach sich zieht.

Es seien nun allgemein h verschiedene Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_h$ von den Ordnungen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ $(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = n)$ vorhanden; dann behaupten wir, daß auch die n Lösungen

$$r_1^x, x r_1^x, \ldots, x^{\mu_1 - 1} r_1^x;\ r_2^x, x r_2^x, \ldots, x^{\mu_2 - 1} r_2^x;\ \ldots;\ r_h^x, x r_h^x, \ldots, x^{\mu_h - 1} r_h^x$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung (1) bilden. Wir haben nur zu beweisen, daß keine Relation von der Form

$$p_x^{(1)} r_1^x + p_x^{(2)} r_2^x + \cdots + p_x^{(h)} r_h^x = 0$$

möglich ist, wenn die $p_x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ Polynome vom Grade $\mu_i - 1$ mit „konstanten" Koeffizienten sind, die nicht sämtlich verschwinden.

---

1) W. 2) Vgl. 3. Kap., II.

Zu diesem Zwecke bilden wir aus der angenommenen Relation die h sukzessiven Gleichungen:

$$p_{x+k}^{(1)} r_1^{x+k} + p_{x+k}^{(2)} r_2^{x+k} + \cdots + p_{x+k}^{(h)} r_h^{x+k} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, h-1),$$

worin nach dem 1. Kap., I (vgl. auch Gl. (2) dieses Kap.):

$$p_{x+k}^{(i)} = p_x^{(i)} + k \Delta p_x^{(i)} + \binom{k}{2} \Delta^2 p_x^{(i)} + \cdots + \Delta^k p_x^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

ist. Da diese Gleichungen für jeden Wert von x bestehen sollen, so müßte auch die Determinante

$$\left| p_{x+k}^{(i)} r_i^k \right| \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, h \\ k = 0, 1, \ldots, h-1 \end{pmatrix}$$

identisch, d. h. für alle Werte von x verschwinden. Der Koeffizient der höchsten Potenz von x in dieser Determinante ist aber, abgesehen von einem „konstanten", nicht identisch verschwindenden Faktor:

$$\left| r_i^k \right| \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, h \\ k = 0, 1, \ldots, h-1 \end{pmatrix} = \prod (r_\mu - r_\nu), \quad \begin{pmatrix} \mu = 2, \ldots h \\ \nu = 1, \ldots, h \end{pmatrix}; \; \mu > \nu \Big).$$

verschwindet also *nicht*, da $r_1, r_2, \ldots, r_h$ von einander verschieden sind. Die angenommene Relation ist also nicht möglich, d. h. die obigen n Lösungen bilden ein Fundamentalsystem von (1).[1])

Beispiele:

1.

$$y_{x+3} + y_{x+2} - 9 y_{x+1} - 9 y_x = 0 \quad \text{(W.)},$$
$$f(r) \equiv r^3 + r^2 - 9r - 9 = (r+1)(r^2 - 9).$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $f(r) = 0$ sind $-1, 3, -3$; daher lautet die allgemeine Lösung:

$$y_x = \omega_1 (-1)^x - \omega_2 3^x + \omega_3 (-3)^x.$$

2.

$$y_{x+2} - 7 y_{x+1} + 6 y_x = 0 \quad \text{(Seliwanoff)},$$
$$f(r) \equiv r^2 - 7r + 6 = (r-1)(r-6),$$
$$y_x = \omega_1 + \omega_2 6^x.$$

3.

$$y_{x+2} - 6 y_{x+1} + 9 y_x = 0 \quad \text{(Seliwanoff)},$$
$$f(r) \equiv r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2,$$
$$y_x = (\omega_1 + \omega_2 x) 3^x.$$

Wenn die Koeffizienten der vorgelegten Differenzengleichung (1) reell sind, so darf man erwarten, daß auch die allgemeine Lösung derselben in reeller Form auftritt, selbst wenn die Wurzeln der

---

1) W.

charakteristischen Gleichung komplexe Größen sind. Wir wollen an einem hinreichend allgemeinen Falle zeigen, wie man das stets erreichen kann:[1])

Die Gleichung $f(r) = 0$ möge eine dreifache komplexe Wurzel r_1 besitzen; dann hat sie nach einem bekannten Satze der Algebra auch eine dreifache konjugierte Wurzel, die wir mit r_4 bezeichnen; die übrigen Wurzeln $r_7, r_8, \ldots, r_n$ sollen reell und von einander verschieden sein. Die allgemeine Lösung unserer Differenzengleichung ist:

$$y_x = (\omega_1 + \omega_2 x + \omega_3 x^2) r_1{}^x + (\omega_4 + \omega_5 x + \omega_6 x^2) r_4{}^x + \omega_7 r_7{}^x + \omega_8 r_8{}^x + \cdots + \omega_n r_n{}^x.$$

Wird

$$r_1 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gesetzt, so ist

$$r_4 = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$r_1{}^x = \varrho^x(\cos x\varphi + i\sin x\varphi),$$
$$r_4{}^x = \varrho^x(\cos x\varphi - i\sin x\varphi).$$

Daher nimmt, wenn man

$$\omega_1 + \omega_4 = \alpha_0, \quad \omega_2 + \omega_5 = \alpha_1, \quad \omega_3 + \omega_6 = \alpha_2,$$
$$(\omega_1 - \omega_4)i = \beta_0, \ (\omega_2 - \omega_5)i = \beta_1, \ (\omega_3 - \omega_6)i = \beta_2$$

setzt, die allgemeine Lösung die Form an:

$$y_x = \varrho^x[(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)\cos\varphi x + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)\sin\varphi x]$$
$$+ \omega_7 r_7{}^x + \omega_8 r_8{}^x + \cdots + \omega_n r_n{}^x;$$

darin sind $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \omega_7, \ldots, \omega_n$ die willkürlichen „Konstanten".[2])

Beispiele:

4.
$$y_{x+2} + 2y_{x+1} + 4y_x = 0 \quad \text{(Seliwanoff)};$$
$$f(r) \equiv r^2 + 2r + 4 = 0;$$
$$r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$
$$y_x = 2^x\left(\omega_1\cos\frac{2\pi}{3}x + \omega_2\sin\frac{2\pi}{3}x\right).$$

5.
$$y_{x+4} + y_x = 0 \quad \text{(Seliwanoff)},$$
$$f(r) \equiv r^4 + 1 = 0,$$
$$r_{1,2} = \cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}, \quad r_{3,4} = \cos\frac{3\pi}{4} \pm \sin\frac{3\pi}{4};$$
$$y_x = \omega_1\cos\frac{\pi}{4}x + \omega_2\sin\frac{\pi}{4}x + \omega_3\cos\frac{3\pi}{4}x + \omega_4\sin\frac{3\pi}{4}x.$$

1) Vgl. *Seliwanoff*, 2.

2) Sollen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ reell sein, so müssen $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ bzw. zu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ konjugiert sein.

6. $y_{x+4} + 2y_{x+3} + 3y_{x+2} + 2y_{x+1} + y_x = 0$ (Markoff);

$$f(r) \equiv r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = (r^2 + r + 1)^2.$$

Die Gleichung $f(r) = 0$ besitzt zwei Doppelwurzeln

$$r_{1,2} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$y_x = (\alpha_0 + \alpha_1 x)\cos\frac{2\pi}{3}x + (\beta_0 + \beta_1 x)\sin\frac{2\pi}{3}x.$$

Soll unter der Annahme

$$y_0 = y_1 = y_3 = 0, \quad y_2 = -1$$

y_{100} berechnet werden, so sind, da nur *ganzzahlige* x in Betracht kommen, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ wirkliche Konstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen folgendermaßen bestimmen lassen:

$$y_0 = \alpha_0 = 0, \quad y_3 = \alpha_0 + 3\alpha_1 = 0,$$

$$y_1 = (\alpha_0 + \alpha_1)\cos\frac{2\pi}{3} + (\beta_0 + \beta_1)\sin\frac{2\pi}{3} = 0,$$

$$y_2 = (\alpha_0 + 2\alpha_1)\cos\frac{4\pi}{3} + (\beta_0 + 2\beta_1)\sin\frac{4\pi}{3} = -1;$$

also:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = -\beta_1 = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}};$$

folglich:

$$y_x = \frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{3}x = \begin{Bmatrix} 0, & \text{wenn } x \equiv 0 \pmod 3 \\ x-1, & \text{wenn } x \equiv 1 \pmod 3 \\ 1-x, & \text{wenn } x \equiv -1 \pmod 3 \end{Bmatrix},$$

und insbesondere:

$$y_{100} = \frac{198}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{3} = 99.$$

Über homogene lineare Differenzengleichungen mit „konstanten" oder überhaupt mit periodischen Koeffizienten existieren noch keine Untersuchungen von hinreichender Allgemeinheit; es sei an dieser Stelle nur bemerkt, daß z. B. die Gleichung $y_{x+1} = e^{2\pi i x}y_x$ die Lösung $y_x = \omega e^{\pi i x(x-1)}$ besitzt, ferner die Gleichung $y_{x+1} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x \cdot y_x$ die Lösung $y_x = \omega\sin\frac{\pi}{2}x$ (ω willkürliche „Konstante".) — Siehe auch die beiden Noten von *Esclangon*, **1.** und **2.**, über vollständige lineare Differenzengleichungen, deren Koeffizienten eine irrationale Periode besitzen.

II. Vollständige Gleichungen.[1]

Die Lösung der vollständigen Gleichung

$$(6)\qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \cdots + a_n y_x = p_x \quad (a_n \neq 0)$$

kann nach den im 3. Kap., V auseinandergesetzten Methoden vollführt werden; die allgemeine Lösung von (6) lautet danach:

$$y_x = y_x^{(1)} \sum p_x z_{x+1}^{(1)} + y_x^{(2)} \sum p_x z_{x+1}^{(2)} + \cdots + y_x^{(n)} \sum p_x z_{x+1}^{(n)},$$

worin die $z_x^{(k)}$ die zu den Lösungen $y_x^{(k)}$ der reduzierten Gleichung $P(y_x) = 0$ adjungierten Funktionen sind und der zu $P(y_x) = 0$ adjungierten Gleichung $\overline{P}(z_x) = 0$ genügen. In unserem Falle lautet die adjungierte Gleichung:

$$\overline{P}(z_x) \equiv z_x + a_1 z_{x+1} + a_2 z_{x+2} + \cdots + a_n z_{x+n} = 0;$$

ihre charakteristische Gleichung

$$\overline{f}(r) \equiv 1 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n = 0$$

besitzt als Wurzeln die reziproken Werte der Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der charakteristischen Gleichung

$$f(r) \equiv r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

der reduzierten Differenzengleichung $P(y_x) = 0$.

Sind sämtliche Wurzeln dieser Gleichung von einander verschieden, so ist:

$$z_x^{(k)} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_{x+n-1}^{(k)}} = \frac{1}{f'(r_k)} \left(\frac{1}{r_k}\right)^x.\text{[2]}$$

Dies ergibt sich auch folgendermaßen: es ist nach dem *3. Kap.*, IV:

$$z_x^{(k)} = \frac{1}{S_k\left(y_x^{(k)}\right)};$$

aber nach Gleichung (4) dieses Kapitels:

$$S_k(r^x) = r^x \frac{f(r)}{r - r_k},$$

also:

$$S_k(r_k^x) = r_k^x f'(r_k).$$

---

1) *Lagrange,* **1.** u. **2.** (vgl. *Lacroix, Boole, Markoff, Seliwanoff*); *W.*

2) Siehe Gleichung (5) dieses Kapitels; die Gleichungen (8) im *2. Kap.*, I, C ergeben für diesen besonderen Fall die aus der Algebra bekannten „Eulerschen Formeln".

Daher lautet die allgemeine Lösung von (6):

$$(7)\quad y_x = \frac{1}{f'(r_1)} r_1^{x-1} \sum \frac{p_x}{r_1^x} + \frac{1}{f'(r_2)} r_2^{x-1} \sum \frac{p_x}{r_2^x} + \cdots + \frac{1}{f'(r_n)} r_n^{x-1} \sum \frac{p_x}{r_n^x};$$

es sei wieder daran erinnert, daß jede Summe Σ noch eine willkürliche additive „Konstante" enthält.

1. *Beispiel:*

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = x \quad \text{(Seliwanoff, W.)};$$

$$f(r) = r^2 - 7r + 6 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 6;$$

$$f'(r) = 2r - 7, \quad f'(1) = -5, \quad f'(6) = 5;$$

$$y_x = -\frac{1}{5} \sum x + \frac{1}{5} \cdot 6^{x-1} \sum \frac{x}{6^x}.$$

$$\sum x = \frac{x(x-1)}{2}, \quad \sum x\left(\frac{1}{6}\right)^x = -\frac{6}{5} x\left(\frac{1}{6}\right)^x - \frac{6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^x;$$ [1]

$$y_x = \omega_1 + \omega_2 6^x - \frac{1}{10} x(x-1) - \frac{1}{25} x - \frac{1}{125},$$

$$y_x = \omega_1 + \omega_2 6^x + \frac{3}{50} x - \frac{1}{10} x^2.$$

In vielen Fällen kann man aber eine Partikularlösung η_x der vollständigen Gleichung (6) *direkt* finden, sodaß, wenn y_x die allgemeine Lösung der reduzierten Gleichung ist, nach dem *3. Kap.*, V die allgemeine Lösung von (6) die Form $y_x = y_x + \eta_x$ hat. Der wichtigste dieser Fälle ist der, daß die rechte Seite $p_x = a^x g_x$ ist, worin g_x eine ganze rationale Funktion von x bedeutet; es kann auch insbesondere $a = 1$ oder $g_x = c$ (Konstante) sein.[2] Wir setzen in diesem Falle, um eine Partikularlösung von (6) zu erhalten, $y_x = a^x u_x$, worin auch u_x eine ganze Funktion ist. Dann ergibt sich vermöge der Identität (4) dieses Kapitels nach Division durch a^x die Gleichung:

$$(8)\quad f(a)u_x + af'(a)\Delta u_x + a^2 \frac{f''(a)}{2!} \Delta^2 u_x + \cdots + a^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Delta^n u_x = g_x,$$

die zur Bestimmung von u_x dient.

Wenn a *keine* Wurzel der charakteristischen Gleichung $f(r) = 0$ ist, so besitzt u_x denselben Grad wie g_x; man setzt nun u_x mit unbestimmten Koeffizienten an und erhält durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der

1) Partielle Summation: $\sum a^x = \frac{a^x}{a-1}$ (siehe z. B. *Seliwanoff*, **2.**, S. 35 u. 37); vgl. *1. Kap.*, II, B. (e) u. (h).

2) Vgl. *Boole*, *Markoff*, *Seliwanoff*.

Gleichung (8) zur Bestimmung derselben ein lineares Gleichungssystem. Von der Auflösbarkeit dieses Gleichungssystems überzeugt man sich am besten folgendermaßen: Nach der *Newton*schen Interpolationsformel[1]) gilt für die ganze Funktion m^{ten} Grades g_x die Entwicklung

$$g_x = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \binom{x}{k},$$

worin

$$\alpha_k = \Delta^k g_0, \quad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \quad \binom{x}{0} = 1$$

ist; setzt man nun in derselben Weise

$$u_x = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \binom{x}{k},$$

so erhält man für die zu bestimmenden Größen β_k aus (8) durch Vergleichung der Koeffizienten von $\binom{x}{k}$ $(k = m, m-1, \ldots, 1, 0)$ die Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \beta_m f(a) = \alpha_m, \\ \beta_{m-1} f(a) + \beta_m a f'(a) = \alpha_{m-1}, \\ \beta_{m-2} f(a) + \beta_{m-1} a f'(a) + \beta_m a^2 \frac{f''(a)}{2!} = \alpha_{m-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Da $f(a) \neq 0$ ist, so lassen sich in der Tat hieraus die Koeffizienten $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_1, \beta_0$ sukzessive bestimmen.

Ist dagegen a eine k-fache Wurzel von $f(r) = 0$, so nimmt die Gleichung (8) durch die Substitution $y_x = a^x u_x$ die Form an:

$$a^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \Delta^k u_x + a^{k+1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} u_x + \cdots + a^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Delta^n u_x = g_x;$$

aus ihr folgt, daß u_x vom $(m+k)^{\text{ten}}$ Grade in x ist, wenn g_x den Grad m besitzt. Man kann hier setzen

$$u_x = \sum_{s=k}^{m+k} c_s x^s \quad \text{oder auch} \quad u_x = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \binom{x}{i+k}$$

und erhält zur sukzessiven Bestimmung der Koeffizienten $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_1, \beta_0$ die Gleichungen:

1) Siehe z. B. *Selivanoff*, **2.**, S. 6.

$$(10)\begin{cases} \beta_m a^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \alpha_m, \\ \beta_{m-1} a^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \beta_m a^{k+1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} = \alpha_{m-1}, \\ \beta_{m-2} a^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \beta_{m-1} a^{k+1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} + \beta_m a^{k+2} \frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!} = \alpha_{m-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind lösbar, weil sowohl a als auch $f^{(k)}(a)$ von Null verschieden sind.

Beispiele:

2. $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = x$ (vgl. das 1. Beispiel).

Hier ist $g_x = x$ und $a = 1$ einfache Wurzel von

$$f(r) \equiv r^2 - 7r + 6 = (r-1)(r-6) = 0;$$

daher existiert eine Partikularlösung:

$$\eta_x = u_x = c_1 x + c_2 x^2;$$

setzt man diesen Wert für y_x in die vorgelegte Gleichung ein, so ergibt sich:

$$c_2 = -\frac{1}{10}, \quad c_1 = \frac{3}{50};$$

daher lautet die allgemeine Lösung:

$$y_x = \omega_1 + \omega_2 6^x + \frac{3}{50} x - \frac{1}{10} x^2,$$

in Übereinstimmung mit dem vorher gefundenen Resultat.

3. $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = a^x$ (Boole).

$$\eta_x = a^x \beta_0, \quad \beta_0(a^2 - 5a + 6) = 1;$$

$$y_x = \omega_1 2^x + \omega_2 3^x + \frac{a^x}{a^2 - 5a + 6}.$$

Ist $a = 3$, also eine Wurzel der Gleichung $f(r) \equiv r^2 - 5r + 6 = 0$, so setze man $\eta_x = 3^x \cdot c_1 x$; dann ergibt sich $c_1 = \frac{1}{3}$, also:

$$y_x = \omega_1 2^x + \omega_2 3^x + x \cdot 3^{x-1};$$

ganz ähnlich für $a = 2$. Man findet dies auch folgendermaßen:

$$\lim_{a=3} \frac{a^x - 3^x}{a^2 - 5a + 6} = \lim_{a=3} \frac{x a^{x-1}}{2a - 5} = x \cdot 3^{x-1}.$$

4. $$y_{x+4} - \frac{5}{2} y_{x+3} + \frac{5}{2} y_{x+1} - y_x = 1 \quad \text{(Markoff)}.$$

Hier ist

$$f(r) \equiv r^4 - \frac{5}{2} r^3 + \frac{5}{2} r - 1 = (r-1)(r+1)\left(r - \frac{1}{2}\right)(r-2);$$

ferner ist $g_x = 1$ und $a = 1$ einfache Wurzel von $f(r) = 0$, also

$$\eta_x = c_1 x$$

eine Partikularlösung, durch deren Einsetzung in die vorgelegte Gleichung $c_1 = -1$ folgt; daher lautet die allgemeine Lösung:

$$y_x = \omega_1 + \omega_2(-1)^x + \omega_3\left(\frac{1}{2}\right)^x + \omega_4 2^x - x.$$

Soll unter der Annahme

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 11, \quad y_2 = -8, \quad y_3 = 6$$

y_{100} berechnet werden, so ergeben sich für die willkürlichen (hier wirklichen) Konstanten die Werte:

$$\omega_1 = \omega_4 = 0, \quad \omega_2 = -\omega_3 = -8,$$

also:

$$y_x = 8(-1)^{x-1} + \frac{8}{2^x} - x$$

und daher:

$$y_{100} = -108 + \frac{8}{2^{100}} = -108 + \frac{1}{2^{97}},$$

d. h. nahezu gleich -108.

5. $$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = x a^x \quad \text{(Boole, W.)}.^{1)}$$

$$f(r) \equiv r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2,$$

$$f(a) = (a-2)^2, \quad f'(a) = 2(a-2);$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 = 0; \quad \eta_x = a^x(\beta_1 x + \beta_0);$$

aus (9):

$$\beta_1 = \frac{1}{(a-2)^2}, \quad \beta_0 = -\frac{2a}{(a-2)^3};$$

$$y_x = (\omega_1 + \omega_2 x) 2^x + \left(\frac{x}{(a-2)^2} - \frac{2a}{(a-2)^3}\right) a^x.$$

Ist $a = 2$, also zweifache Wurzel von $f(r) = 0$, so hat man zu setzen

$$\eta_x = 2^x\left(\beta_0 \frac{x(x-1)}{2!} + \beta_1 \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\right);$$

1) *Boole* (**1.**) benutzt symbolische Methoden; die obige Rechnung zeigt, daß man ohne dieselben ebenso schnell zum Ziele gelangt.

aus den Gleichungen (10) ergibt sich, da hier $m=1$, $k=2$, $f''(a)=2$, $f'''(a)=0$ ist:

$$\beta_1 = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}, \quad \beta_0 = 0,$$

also:

$$y_x = (\omega_1 + \omega_2 x) 2^x + \frac{x(x-1)(x-2)}{24} 2^x.$$

Besteht die rechte Seite aus mehreren Gliedern von der Form $a^x g_x$, so greift folgende einfache Bemerkung Platz: Ist u_x eine Lösung von $P(y_x) = p_x$ und v_x eine Lösung von $P(y_x) = q_x$, so ist $u_x + v_x$ eine Lösung von $P(y_x) = p_x + q_x$; in der Tat ist:

$$P(u_x + v_x) = P(u_x) + P(v_x) = p_x + q_x.$$

6. $$y_{x+2} + a^2 y_x = \cos mx \quad \text{(Boole, W.).[1]}$$

$$f(r) \equiv r^2 + a^2 = 0: \quad r_1 = a e^{\frac{\pi i}{2}}, \quad r_2 = a e^{-\frac{\pi i}{2}};$$

$$\cos mx = \frac{1}{2}(e^{mix} + e^{-mix}).$$

Die reduzierte Gleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$\bar{y}_x = a^x \left(\omega_1 \cos \frac{\pi}{2} x + \omega_2 \sin \frac{\pi}{2} x\right).$$

Eine Partikularlösung der Gleichung

$$y_{x+2} + a^2 y_x = \frac{1}{2} e^{\pm mix}$$

hat nach unserer Theorie die Form:

$$\eta_x^{(1,2)} = b_{1,2}\, e^{\pm mix};$$

durch Einsetzen in dieselbe ergibt sich:

$$b_{1,2} = \frac{1}{2}(e^{\pm 2mi} + a^2)^{-1};$$

daher lautet nach unserer obigen Bemerkung eine Partikularlösung der vorgelegten Gleichung:

$$\eta_x = \frac{1}{2}\left[(e^{2mi} + a^2)^{-1} e^{mix} + (e^{-2mi} + a^2)^{-1} e^{-mix}\right] = \frac{a^2 \cos mx + \cos m(x-2)}{a^4 + 2a^2 \cos 2m + 1},$$

und daher ihre allgemeine Lösung:

$$y_x = a^x\left(\omega_1 \cos \frac{\pi}{2} x + \omega_2 \sin \frac{\pi}{2} x\right) + \frac{a^2 \cos mx + \cos m(x-2)}{a^4 + 2a^2 \cos 2m + 1}.$$

Aber auch in anderen Fällen kann man zuweilen direkt eine Partikularlösung der vollständigen Gleichung finden, wie wir an zwei Beispielen erläutern wollen:

---

1) Vgl. die Anmerkung auf S. 179.

7. $$y_{x+3}+2y_{x+2}+2y_{x+1}+y_x=\frac{3}{x(x+3)}+\frac{3}{(x-1)(x+2)}$$ (Markoff

$$f(r)\equiv r^3+2r^2+2r+1=(r+1)(r^2+r+1)=0:$$

$$r_1=-1,\quad r_{2,3}=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3};$$

die reduzierte Gleichung besitzt also die Lösungen

$$\overline{y}_x^{(1)}=(-1)^x,\quad \overline{y}_x^{(2)}=\cos\frac{2\pi}{3}x,\quad \overline{y}_x^{(3)}=\sin\frac{2\pi}{3}x.$$

Der Anblick der rechten Seite suggeriert den Ansatz:

$$\eta_x=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x};$$ [1])

durch Einsetzen in die gegebene Gleichung folgt:

$$a=-b=1,$$

also:

$$y_x=\omega_1(-1)^x+\omega_2\cos\frac{2\pi}{3}x+\omega_3\sin\frac{2\pi}{3}x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}.$$

Soll unter der Annahme

$$y_2=\frac{3}{2},\quad y_3=-\frac{5}{6},\quad y_4=1\tfrac{1}{12},$$

y_{200} berechnet werden, so ergibt sich zunächst aus den Anfang bedingungen für ganzzahlige x:

$$\omega_1=1,\quad \omega_2=\omega_3=0,$$

also:

$$y_x=(-1)^x+\frac{1}{x(x-1)},$$

und daher:

$$y_{200}=1+\frac{1}{39800}.$$

Ist endlich die rechte Seite der Gleichung (6) von der Form

$$p_x=\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)t^{x-1}dt,$$

so ist offenbar

$$\eta_x=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{f(t)}t^{x-1}dt,$$

worin $f(t)$ die charakteristische Funktion bedeutet, eine Partikula

1) Man kann natürlich auch die Methode der Variation der „Konstanten anwenden, doch wird die Rechnung bedeutend länger.

lösung von (6), vorausgesetzt, daß das Integral überhaupt einen Sinn hat.[1])

8. *Beispiel:*

$$y_{x+1} - \frac{1}{a} y_x = \frac{1}{x}.^{1)}$$

Da $\frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1} dt \; (x > 0)$, also hier $\varphi(t) = 1$ ist, so wird:

$$\eta_x = \int_0^1 \frac{a t^{x-1}}{at - 1} dt \quad (a < 1;\ x > 0).$$

Am Schlusse dieses Abschnittes möge bemerkt werden, daß Gleichungen von der Form

$$y_{x+n} + a_1 q_x y_{x+n-1} + a_2 q_x q_{x-1} y_{x+n-2} + \cdots + a_n q_x q_{x-1} \cdots q_{x-n+1} y_x = p_x{}^{2)}$$

durch die Substitution $y_x = \Pi q_{x-n+1} \cdot u_x$ (z. B. durch $y_x = \Gamma(x-n+1) u_x$, wenn $q_x = x$ ist) nach Division durch Πq_{x+1} (bzw. durch $\Gamma(x+1)$, wenn $q_x = x$) in Gleichungen mit konstanten Koeffizienten transformiert werden, nämlich in:

$$u_{x+n} + a_1 u_{x+n-1} + a_2 u_{x+n-2} + \cdots + a_n u_x = \frac{p_x}{\Pi q_{x+1}} \left(\text{bzw. } \frac{p_x}{\Gamma(x+1)}\right).$$

Z. B. wird die Gleichung

$$y_{x+n} + a_1 a^x y_{x+n-1} + a_2 a^{2x} y_{x+n-2} + \cdots + a_n a^{nx} y_x = p_x ,$$

die auch in der Form

$$y_{x+n} + a_1 a^x y_{x+n-1} + a_1 a a^x a^{x-1} y_{x+n-2} + \cdots + a_n a^{\frac{n(n-1)}{2}} a^x a^{x-1} \cdots a^{x-n+1} y_x = p_x$$

geschrieben werden kann, durch die Substitution

$$y_x = \Pi a^{x-n+1} \cdot u_x = a^{\frac{(x-n)(x-n+1)}{2}} \cdot u_x$$

nach Division durch $\Pi a^{x+1} = a^{\frac{x(x+1)}{2}}$ in die Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + a_2 a y_{x+n-2} + \cdots + a_n a^{\frac{n(n-1)}{2}} y_x = p_x a^{-\frac{x(x+1)}{2}}$$

transformiert. — Besonders einfach gestaltet sich der Fall $p_x = 0$.

---

1) Vgl. *Nielsen,* **3.**, S. 264.
2) *Boole,* **1.** (Deutsche Ausgabe S. 123 ff.)

III. Anwendungen.

A. Anwendungen auf rekurrente Reihen.[1]

Rekurrente Reihen (in engerem Sinne) sind solche Reihen

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_x, y_{x+1}, \ldots,$$

für die je n aufeinanderfolgende Glieder durch eine Relation

$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + a_2 y_{x+n-2} + \cdots + a_n y_x = 0$$

mit konstanten Koeffizienten verbunden sind. Die Auflösung dieser Differenzengleichung gestattet, das allgemeine Glied y_x der Reihe als explizite Funktion des (ganzzahligen) Index x darzustellen.

1. *Lehrsatz: Eine konvergente Potenzreihe*

$$F(t) = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots,$$

deren Koeffizienten eine rekurrente Reihe bilden, ist eine rationale Funktion von t.[2]

Beweis: Die Relation zwischen n Koeffizienten der Reihe sei:

$$P(y_x) \equiv y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + a_2 y_{x+n-2} + \cdots + a_n y_x = 0.$$

Nach Multiplikation von $F(t)$ mit

$$\psi(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

erhält man:

$$\varphi(t) = F(t)\psi(t) = y_0 + (y_1 + a_1 y_0)t + (y_2 + a_1 y_1 + a_2 y_0)t^2 + \cdots$$
$$\cdots + (y_{n-1} + a_1 y_{n-2} + \cdots + a_{n-1} y_0)t^{n-1};$$

die Koeffizienten der folgenden Potenzen sind nämlich die Werte der Funktion

$$P(y_x) \equiv y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + a_2 y_{x+n-2} + \cdots + a_n y_x$$

für $x = 0, 1, 2, \ldots$, also infolge der obigen Relation alle gleich Null; daher ist:

$$F(t) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$$

eine rationale Funktion von t. Q. e. d.

Umgekehrt läßt sich die rationale Funktion

$$R(t) = \frac{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_{n-1} t^{n-1}}{1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n}$$

[1] Die Literatur über rekurrente Reihen siehe bei *Andoyer*, **1.**, S. 69, Note 48.

[2] Vgl. z. B. *Serret*, Algebra, deutsch von Wertheim, Leipzig 1878, 1. B., S. 426 ff.; *Seliwanoff*, **2.**, S. 90 ff. $F(t)$ heißt die „*erzeugende Funktion*“ (*Laplace*, **1.**, S. 7 ff.).

in die Reihe
$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots$$
entwickeln, für die je n aufeinanderfolgende Koeffizienten durch die Relation
$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + a_2 y_{x+n-2} + \cdots + a_n y_x = 0$$
verbunden sind. Die ersten n Koeffizienten bestimmen sich aus den Gleichungen:
$$\begin{aligned} y_0 &= b_0 , \\ y_1 + a_1 y_0 &= b_1 , \\ y_2 + a_1 y_1 + a_2 y_0 &= b_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n-1} + a_1 y_{n-2} + \cdots + a_{n-1} y_0 &= b_{n-1} . \end{aligned}$$

Die Differenzengleichungen können also dazu dienen, die Koeffizienten der Entwickelungen rationaler Funktionen in Potenzreihen als explizite Funktionen des Index zu bestimmen.

2. *Aufgabe: Es soll das allgemeine Glied der* **Schimperschen** *Reihe (der Zahlen des* ***Fibonacci*** [1])
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots,$$
deren jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden Glieder ist, bestimmt werden. [2])

Lösung: Je drei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe genügen der Relation
$$y_{x+2} - y_{x+1} - y_x = 0;$$
die Anfangsglieder sind $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Die charakteristische Gleichung
$$f(r) \equiv r^2 - r - 1 = 0$$
hat die Wurzeln
$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$
daher ist die allgemeine Lösung:
$$y_x = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^x;$$
aus den Anfangsbedingungen ergibt sich $c_1 = - c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; also lautet das allgemeine Glied:
$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^x\right].$$

---

1) *Fibonacci,* genannt *Leonardo Pisano,* Liber abaci, 1202 u. 1228.
2) *Seliwanoff,* **2.**, S. 90; vgl. *Frege,* Habilit.-Schrift, Jena 1874, S. 21.

3. *Aufgabe: Aus m gegebenen Zahlen*

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$$

wird eine unendliche Reihe derart gebildet, daß jedes Glied derselben das arithmetische Mittel der m vorhergehenden Glieder ist; welcher Grenze nähert sich y_n, wenn n unendlich wächst? [1])

Lösung: Die der Aufgabe entsprechende Differenzengleichung lautet:

$$y_{x+m} - \frac{1}{m}(y_{x+m-1} + y_{x+m-2} + \cdots + y_{x+1} + y_x) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$f(r) \equiv r^m - \frac{1}{m}(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + r + 1) = 0$$

besitzt eine Wurzel 1, und es ist:

$$\psi(r) \equiv \frac{m f(r)}{r-1} = m r^{m-1} + (m-1) r^{m-2} + \cdots + 3r^2 + 2r + 1;$$

die Wurzeln von $\psi(r) = 0$ seien $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$. Dann lautet die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (für ganzzahlige x):

$$y_x = c_0 + c_1 r_1^x + c_2 r_2^x + \cdots + c_{m-1} r_{m-1}^x;$$

die Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 \quad &+ c_2 \quad + \cdots + c_{m-1} &= y_0,\\
c_0 + c_1 r_1 \quad &+ c_2 r_2 \quad + \cdots + c_{m-1} r_{m-1} &= y_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_0 + c_1 r_1^{m-1} &+ c_2 r_2^{m-1} + \cdots + c_{m-1} r_{m-1}^{m-1} &= y_{m-1}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich, wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, 2, \ldots, m$ multipliziert und addiert:

$$\frac{m(m+1)}{2} c_0 = y_0 + 2y_1 + 3y_2 + \cdots + m y_{m-1}.$$

Man kann nun leicht zeigen, daß der absolute Wert der Wurzeln r_k ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) kleiner als 1 ist: Es sei $r_k = \varrho e^{\varphi i}$ eine Wurzel von $\psi(r) = 0$, worin ϱ der absolute Betrag von r_k ist. Dann muß

$$\varrho^m \leqq \frac{1}{m}(\varrho^{m-1} + \varrho^{m-2} + \cdots + \varrho + 1)$$

sein, und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur für $\varphi = 0$. Wenn nun $\varrho \geqq 1$, so ist:

$$\varrho^m \geqq \varrho^{m-1} \geqq \varrho^{m-2} \geqq \cdots \geqq \varrho \geqq 1,$$

1) *Markoff, W.*

und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur für $\varrho = 1$; daher müßte

$$\varrho^m \leqq \frac{1}{m} m \varrho^{m-1}$$

sein; hierin gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn gleichzeitig $\varphi = 0$ und $\varrho = 1$, also $r_k = 1$ ist. Da aber $\psi(1) \neq 0$ ist und die letzte Ungleichung für das Zeichen $<$ einen Widerspruch mit der vorhergehenden ergibt, so müssen sämtliche Wurzeln r_k $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ von $\psi(r) = 0$ dem absoluten Werte nach kleiner als 1 sein. Daraus folgt aber:

$$\lim_{x=\infty} y_x = c_0 = \frac{2}{m(m+1)} (y_0 + 2y_1 + 3y_2 + \cdots + my_{m-1}).$$

B. Anwendungen auf die Geometrie.

4. *Aufgabe: Die Kurven von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn von einem festen Punkte in ihrer Ebene n Strahlen gezogen werden, die gleiche Winkel mit einander bilden, und dieses Strahlenbüschel um den festen Punkt gedreht wird, die Summe der Radienvektoren konstant bleibt.*[1])

Lösung: Die Winkel, welche die Strahlen mit einer festen Achse bilden, können ausgedrückt werden durch

$$\varphi, \quad \varphi + \frac{2\pi}{n}, \quad \varphi + \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \varphi + \frac{2(n-1)\pi}{n};$$

und wenn $r = F(\varphi)$ die Polargleichung der Kurve in bezug auf den gegebenen Punkt als Pol ist, so hat man:

$$F(\varphi) + F\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + F\left(\varphi + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = na,$$

worin a eine Konstante ist. Wir setzen nun

$$\varphi = \frac{2\pi}{n} x \quad \text{und} \quad F\left(\frac{2\pi}{n} x\right) = y_x;$$

dann erhalten wir die Differenzengleichung:

$$y_x + y_{x+1} + \cdots + y_{x+n-1} = na;$$

ihre allgemeine Lösung ist

$$y_x = a + \omega_1 \cos \frac{2\pi}{n} x + \omega_2 \cos \frac{4\pi}{n} x + \cdots + \omega_{n-1} \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} x,$$

worin die ω_k „Konstanten" bedeuten. Daher lautet die Gleichung der gesuchten Kurven:

$$r = a + \omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \cos 2\varphi + \cdots + \omega_{n-1} \cos (n-1)\varphi;$$

die Partikularlösung

$$r = a + b \cos \varphi,$$

1) *Boole*, **1.**

chen Koordinaten

$$(x^2 - bx + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

Fußpunktenkurve des Kreises dar, welche also auch die ver-
enschaft besitzt.

*fgabe: Es soll die Gleichung der Kurven aufgestellt werden,
das Produkt der beiden Abschnitte der von einem festen Punkte
Kurve gezogenen Geraden konstant ist.*[1])

g: Ist wieder $r = F(\varphi)$ die Gleichung der gesuchten Kurve
ordinaten, so hat man

$$F(\varphi) \cdot F(\varphi + \pi) = c^2,$$

$\varphi = \pi x$ und $F(\pi x) = y_x$ gesetzt wird:

$$y_x y_{x+1} = c^2.$$

ferner $y_x = c u_x$ und erhalten:

$$u_x u_{x+1} = 1;$$

arithmieren ergibt sich:

$$\ln u_x + \ln u_{x+1} = 0,$$

man $\ln u_x = v_x$ setzt:

$$v_{x+1} + v_x = 0.$$

Partikularlösung dieser Differenzengleichung erster Ord-

$$v_x^{(1)} = \frac{1}{2}(e^{\pi i x} + e^{-\pi i x}) = \cos \pi x,$$

lgemeine Lösung:

$$v_x = \omega_x \cos \pi x,$$

ine willkürliche periodische Funktion von der Periode 1 ist.
et die Gleichung der gesuchten Kurven:

$$r_\varphi = c\, e^{\varrho_\varphi \cos \varphi},$$

eine beliebige reelle Funktion von φ mit der Periode π be-
der Tat ist:

$$r_\varphi \cdot r_{\varphi + \pi} = c^2.$$

ir $\varrho_\varphi = \operatorname{tg} \varphi$:

$$r = c\, e^{\sin \varphi};$$

wird $r = c$, d. i. die Polargleichung des Kreises, bezogen
Mittelpunkt. Auf einen Punkt mit dem Abstande b vom
te bezogen, lautet die Polargleichung des Kreises mit dem

$$r = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi} + b \cos \varphi,$$

le, W.

oder, wenn $a > b$ ist und $a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt wird:

$$r = c\left(\frac{b}{c}\cos\varphi + \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}\cos^2\varphi}\right),$$

oder endlich:

$$r = c e^{\ln\left(\frac{b}{c}\cos\varphi + \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}\cos^2\varphi}\right)};$$

hier ist also:

$$\varrho_\varphi = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\cos\varphi + \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}\cos^2\varphi}\right)}{\cos\varphi},$$

und dies ist in der Tat eine periodische Funktion von φ mit Periode π.

Weitere Anwendungen auf die Geometrie finden sich *E. Combescure* (**1.**).

Achtes Kapitel.

Differenzengleichungen mit linearen Koeffizienten. Integration derselben durch bestimmte Integrale.

Den linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten stehen am nächsten diejenigen, deren Koeffizienten lineare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind.

I. Homogene Gleichungen.[1]

Die sogenannte *Laplace*sche Differenzengleichung lautet:

$$(1) \quad (a_0 x + b_0) y_x + (a_1 x + b_1) y_{x+1} + \cdots + (a_n x + b_n) y_{x+n} = 0, \quad (a_n \neq 0);$$

setzt man

$$\psi(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \quad \varphi(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n,$$

so kann dieselbe mit Benutzung des Operationssymbols D (s. 1. Kap., I) kurz in der symbolischen Form

$$[\varphi(D) + x\psi(D)](y_x) = 0$$

geschrieben werden. Um diese Gleichung zu lösen, setzen wir mit *Laplace*:

$$(2) \qquad y_x = \int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} f(t)\, dt,\text{[2]}$$

worin die Funktion $f(t)$ und die Grenzen t_1 und t_2 passend zu bestimmen sind; dann wird Gleichung (1):

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} f(t) \left(\varphi(t) + x\psi(t)\right) dt = 0.$$

---

1) *Laplace*, **1.**; *Pincherle*, **1^a.**; *Heymann*, **1.**; *Brajtzew*, **1.**; *Webb*, **1.**; *W.*

2) Diese sogenannte „*Laplace*sche Transformation" ist für die linearen Differenzengleichungen von außerordentlicher Wichtigkeit, weil durch dieselbe das Problem ihrer Lösung auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zurückgeführt wird (und umgekehrt); vgl. 10. Kap., III.

Nun erhält man durch partielle Integration:

$$\int x t^{x-1} f(t)\,\psi(t)\,dt = t^x f(t)\,\psi(t) - \int t^x \frac{d(f(t)\,\psi(t))}{dt}\,dt;$$

also ergibt sich:

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1}\,dt\left[\varphi(t)f(t) - t\frac{d(\psi(t)\,f(t))}{dt}\right] + \left[t^x\psi(t)f(t)\right]_{t_1}^{t_2} = 0\,.$$

Die Gleichung (1) wird durch den Ausdruck (2) befriedigt werden, wenn jeder dieser beiden Teile für sich verschwindet; aus

$$\varphi(t)f(t) - t\frac{d(\psi(t)\,f(t))}{dt} = 0$$

folgt:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\varphi(t) - t\,\psi'(t)}{t\,\psi(t)},$$

also mit Unterdrückung einer multiplikativen Konstanten[1]):

$$f(t) = \frac{1}{\psi(t)}\,e^{\int\frac{\varphi(t)}{t\,\psi(t)}dt}.$$

Es sei nun $\psi(t) = a_n(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\ldots(t-\alpha_n)$ und, in Partialbrüche zerlegt,

$$\frac{\varphi(t)}{t\,\psi(t)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k}{t-\alpha_k}, \quad (\alpha_0 = 0), \tag{3}$$

und wir wollen zunächst annehmen, daß alle α_k von einander verschieden sind; dann ist, abgesehen von einem konstanten Faktor:

$$f(t) = t^{\beta_0}(t-\alpha_1)^{\beta_1-1}\ldots(t-\alpha_n)^{\beta_n-1}.$$

Die Grenzen t_1 und t_2 sind nun so zu wählen, daß

$$\left[t^{x+\beta_0}(t-\alpha_1)^{\beta_1}\ldots(t-\alpha_n)^{\beta_n}\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{4}$$

wird; unter der Voraussetzung, daß die reellen Teile von $x+\beta_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ positiv sind, erreicht man dies, indem man $t_1 = 0$, $t_2 = \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ setzt. Man erhält so n Partikularlösungen von (1):

$$y_x^{(k)} = \int_0^{\alpha_k} t^{\beta_0+x-1}(t-\alpha_1)^{\beta_1-1}\ldots(t-\alpha_n)^{\beta_n-1}\,dt, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Ist $a_n = 0$[2]), also $\psi(t)$ etwa vom Grade $n-r$ in t, so tritt in der Partialbruchzerlegung (3) eine ganze Funktion $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades von t,

---

1) Diese Konstante ist zwar von t unabhängig, kann aber eine periodische Funktion von x mit der Periode 1 sein.

2) Dann muß $b_n \neq 0$ sein, da sich sonst die Ordnung der Gleichung (1) erniedrigt.

also unter dem Integral (5) $e^{\varrho(t)}$ auf, worin $\varrho(t)$ eine ganze Funktion ν^{ten} Grades bedeutet; ist ferner α_s eine μ-fache Wurzel von $\psi(t)=0$, so enthält der Integrand von (5) einen Faktor von der Form:

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{\mu-1} \frac{\gamma_i}{(t-\alpha_s)^i}}.$$

Auch in diesen Fällen sowie in den Fällen, wo die reellen Teile von $\beta_0+x, \beta_1, \ldots, \beta_n$ negativ (bez. Null) sind, kann durch geeignete (komplexe) Integrationswege (sogenannte Doppelschleifen) der Ausdruck (4) zum Verschwinden gebracht werden; ausführliche Darlegungen über diese Integrationswege findet man in *Schlesingers* „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen", Bd. I, S. 409 ff. — Als *Beispiel* kann die im 1. Kap., II, C behandelte Differenzengleichung der Gammafunktion dienen.

II. Vollständige Gleichungen.[1]

A. Die rechte Seite ist eine ganze rationale Funktion von x.

Es möge zunächst eine allgemeine Bemerkung gemacht werden: Wenn eine lineare Differenzengleichung in der Form

$$(6)\qquad q_x^{(n)}\Delta^n y_x + q_x^{(n-1)}\Delta^{n-1} y_x + \cdots + q_x^{(1)}\Delta y_x + q_x^{(0)} y_x = q_x$$

vorliegt, worin die Koeffizienten $q_x^{(i)}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ ganze Funktionen von x sind, deren Grad den Index nicht übersteigt, während q_x eine ganze Funktion vom beliebigen Grade m ist, so genügt ihr als Partikularlösung *im allgemeinen eine ganze Funktion m^{ten} Grades,* die man zweckmäßig nach Binomialkoeffizienten $\binom{x}{k}$ fortschreiten läßt.[2] Denn setzt man

$$y_x = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2\binom{x}{2} + \cdots + \gamma_m\binom{x}{m}$$

in (6) ein, so wird die linke Seite im allgemeinen eine ganze Funktion m^{ten} Grades, deren Koeffizienten die γ_i linear enthalten; durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (6) erhält man also $m+1$ lineare Gleichungen für die $m+1$ Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, aus denen sich diese im allgemeinen bestimmen lassen.

Übersteigt dagegen der Grad der $q_x^{(i)}$ auch nur an einer einzigen

1) *Heymann,* **1.**, S. 309 ff.; *W.*
2) *Newtons* Interpolationsformel; vgl. z. B. *Seliwanoff,* **2.**, S. 6.

Stelle den Index, so ist der Vorgang nicht so einfach. Wir wollen für diesen Fall die Gleichung (6) wieder in der Gestalt

$$(7)\quad P(y_x) \equiv p_x^{(n)} y_{x+n} + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(0)} y_x = p_x$$

schreiben und annehmen, daß μ ($\leqq m$) den höchsten Grad der Koeffizienten $p_x^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ bezeichnet, während p_x vom Grade m ist. Wir machen nun in (7) die Substitution

$$y_x = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{m-\mu} x^{m-\mu} + z_x;$$

dadurch geht die Gleichung (7) über in

$$f(x) + P(z_x) = p_x,$$

worin $f(x)$ eine ganze rationale Funktion m^{ten} Grades bedeutet, deren Koeffizienten die γ_i linear enthalten. Mittels dieser $m - \mu + 1$ unbestimmten γ_i können wir es im allgemeinen erreichen, daß auf beiden Seiten dieser Gleichung die Potenzen x^m bis x^μ gleiche Koeffizienten erhalten und sich aufheben, sodaß die für z_x zurückbleibende Differenzengleichung

$$P(z_x) = p_x - f(x)$$

als zweiten Teil eine ganze Funktion von x besitzt, deren Grad auf den $\mu - 1^{\text{ten}}$ herabgedrückt ist.

Wir betrachten nun eine vollständige *Laplace*sche Differenzengleichung

$$(8)\quad \sum_{k=0}^{n} (a_k x + b_k) y_{x+k} = g(x),$$

worin $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist: hier übersteigt nur der Grad des Koeffizienten von y_x den Index 0 um 1; daher läßt sich nach unseren obigen Auseinandersetzungen der Grad von $g(x)$ im allgemeinen auf den 0ten herabdrücken, d. h. $g(x)$ kann im allgemeinen als Konstante $\varkappa$ vorausgesetzt werden. Unsere Gleichung lautet dann

$$(9)\quad \sum_{k=0}^{n} (a_k x + b_k) y_{x+k} = \varkappa;$$

sie kann durch dasselbe Integral (5) wie die homogene Gleichung integriert werden, wenn man statt der Grenze 0 eine andere, z. B. 1 nimmt, für welche der Ausdruck in (4) nicht verschwindet. Setzen wir in der Tat in (9):

$$y_x^{(k)} = \lambda \int_{\alpha_k}^{1} t^{\beta_0 + x - 1} (t - \alpha_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (t - \alpha_n)^{\beta_n - 1}\, dt,\text{[1]}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_0 = 0),$$

1) Es genügt, das eine Partikularintegral mit den Grenzen 0 und 1 zu nehmen, da man nach I die Lösungen der reduzierten Gleichung kennt.

so tritt an Stelle der Gleichung (4) die Gleichung

$$a_n \lambda \left[t^{x+\beta_0}(t-\alpha_1)^{\beta_1} \dots (t-\alpha_n)^{\beta_n}\right]_{\alpha_k}^{1} = \varkappa,$$

aus welcher, falls $a_n \neq 0$ und $\Re(\beta_k)$[1] > 0 ist,

$$\lambda = \varkappa(1-\alpha_1)^{-\beta_1} \dots (1-\alpha_n)^{-\beta_n} : a_n \tag{10}$$

folgt.

Für $a_n = 0$, $\Re(\beta_k) \leqq 0$ und für mehrfache Wurzeln α_i von $\psi(t) = 0$ treten die unter I angegebenen Modifikationen ein. Ferner versagt die Bestimmung von λ aus Gleichung (10), wenn eine der Wurzeln α_i gleich 1 ist. In diesem Falle ist aber $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$, sodaß die Gleichung (8), wenn man darin die Differenzen $\Delta^k y_x$ einführt, zum Typus (6) gehört und daher als Partikularlösung im allgemeinen eine ganze rationale Funktion von x besitzt, deren Grad gleich dem von $g(x)$ ist.

Beispiel:

$$y_{x+n} - x y_x = \varkappa \quad \text{(Heymann)}.$$

Durch die Substitution $x = nz$, $y_{nz} = u_z$ geht die vorgelegte Gleichung über in

$$u_{z+1} - nz u_z = \varkappa;$$

daher lauten die Partikularlösungen der reduzierten Gleichung:

$$\overline{y}_x^{(k)} = \varepsilon_k^x \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n; \ \varepsilon_k^n = n).$$

Ferner ist in unserem Falle $\varphi(t) = t^n$, $\psi(t) = -1$; daher lautet eine Partikularlösung der gegebenen Gleichung:

$$y_x = \lambda \int_1^\infty e^{-\frac{t^n}{n}} t^{x-1}\, dt;$$

die Konstante λ bestimmt sich aus der Gleichung

$$-\lambda \left[e^{-\frac{t^n}{n}} t^x\right]_1^\infty = \varkappa, \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \varkappa e^{\frac{1}{n}}.$$

Diese Lösung gilt für jeden Wert von x; für $n = 1$, $\varkappa = e^{-1}$ ergibt sich die Funktion $Q(x)$.[2]

Wir haben im vorhergehenden mehrfach den Ausdruck „im allgemeinen" gebraucht, um anzudeuten, daß *Ausnahmefälle* eintreten können, in denen sich die Koeffizienten der angesetzten ganzen ratio-

1) $\Re(\beta)$ bedeutet: *„reeller Teil von β"*.
2) Vgl. *1. Kap.*, II, C.

nalen Funktion von x aus dem linearen Gleichungssystem nicht bestimmen lassen. Wir wollen nun an einem vollständig durchgeführten Beispiel, welches alle auftretenden Möglichkeiten klar erkennen läßt, die Natur dieser Ausnahmefälle erläutern, die eine überraschend große Mannigfaltigkeit darbieten: Es sei gegeben die Differenzengleichung[1])

$$(11)\quad P(y_x) \equiv (a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\Delta^2 y_x + (a_1 x + b_1)\Delta y_x + a_0 y_x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2,$$

worin $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt werden kann, da sich sonst $P(y_x)$ durch die Substitution $\Delta y_x = u_x$ auf einen Differenzenausdruck erster Ordnung in u_x reduziert. Wir setzen an:

$$y_x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \binom{x}{2}$$

und erhalten durch Vergleichung der Koeffizienten von x^2, x^1, x^0 in (11) die drei Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2\right)\beta_2 = \alpha_2, \\ (a_0 + a_1)\beta_1 + \left(b_1 + b_2 - \frac{a_0}{2}\right)\beta_2 = \alpha_1, \\ a_0\beta_0 + b_1\beta_1 + c_2\beta_2 = \alpha_0, \end{cases}$$

aus denen sich β_2, β_1, β_0 im allgemeinen bestimmen lassen.

Ausnahmefälle:

1. $$\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 = 0, \quad a_0 + a_1 \neq 0.$$

In diesem Falle besitzt die reduzierte Gleichung $P(y_x) = 0$ als Partikularlösung eine ganze Funktion zweiten Grades; denn setzt man in den Gleichungen (12) $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$, so ist die erste von selbst erfüllt für ein beliebiges β_2, und aus der zweiten und dritten kann man sukzessive β_1 und β_0 durch β_2 ausdrücken, sodaß eine Lösung von der Form

$$(13)\quad \bar{y}_x = \beta_2\left(B_0 + B_1 x + \frac{x(x-1)}{2}\right)$$

resultiert.[2]) Setzt man in diesem Falle

$$y_x = \beta_0 + \beta_1 x + z_x,$$

worin β_0 und β_1 durch die Gleichungen

1) *W.*

2) Ist allgemein m die *kleinste* Zahl, für welche $a_0 + m a_1 + m(m-1) a_2 = 0$ ist, so besitzt die reduzierte Gleichung $P(y_x) = 0$ als *Partikularlösung eine ganze Funktion m^{ten} Grades.*

$$(a_0 + a_1)\beta_1 = \alpha_1, \quad a_0\beta_0 + b_1\beta_1 = \alpha_0$$

bestimmt werden, so ergibt sich für z_x die Differenzengleichung

$$P(z_x) = \alpha_2 x^2;$$

dieselbe kann durch Variation der „Konstanten"[1]) gelöst werden unter Berücksichtigung des erleichternden Umstandes, daß die reduzierte Gleichung $P(z_x) = 0$ die Lösung (13) besitzt.

Es ist aber auch möglich, daß eine ganze Funktion *höheren* als zweiten Grades der Gleichung (11) genügt; setzen wir z. B. an:

$$y_x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2\binom{x}{2} + \beta_3\binom{x}{3},$$

so erhalten wir zur Bestimmung der Größen β_k die Gleichungen:

$$\left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2\right)\beta_3 = 0,$$

$$\left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2\right)\beta_2 + \left(\frac{b_1}{2} + b_2 - \frac{a_0}{2}\right)\beta_3 = \alpha_2,$$

$$(a_0 + a_1)\beta_1 + \left(b_1 + b_2 - \frac{a_0}{2}\right)\beta_2 + \left(\frac{a_0}{3} - \frac{b_1}{2}\right)\beta_3 = \alpha_1,$$

$$a_0\beta_0 + b_1\beta_1 + c_2\beta_2 = \alpha_0.$$

Zunächst muß

$$\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2 = 0$$

sein, was zusammen mit

$$\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 = 0$$

$a_1 = -\frac{2}{3}a_0$, $a_2 = \frac{1}{6}a_0$ ergibt; ferner muß

$$\frac{b_1}{2} + b_2 - \frac{a_0}{2} \neq 0$$

sein[2]); alsdann lassen sich sukzessive β_3, β_1, β_0 aus den obigen Gleichungen bestimmen, während β_2 willkürlich bleibt und gleich Null gesetzt werden kann, da ja noch die Lösung (13) der reduzierten Gleichung hinzutritt.

2. $$\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 \neq 0, \quad a_0 + a_1 = 0.$$

Hier ist eine Bestimmung der β_k aus dem System (12) noch möglich, wenn

---

1) 3. *Kap.*, V.

2) Ist $\frac{b_1}{2} + b_2 - \frac{a_0}{2} = 0$, so genügt der *reduzierten* Gleichung $P(y_x) = 0$ außer einer ganzen Funktion zweiten Grades auch eine Funktion dritten Grades, sodaß ihre *allgemeine* Lösung bekannt ist.

$$\frac{\alpha_2}{\frac{a_0}{2}+a_1+a_2}=\frac{\alpha_1}{b_1+b_2-\frac{a_0}{2}}\;(=\beta_2),$$

d. h.

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{2a_1+2a_2+a_0}{2b_1+2b_2-a_0} \tag{14}$$

ist (es kann auch $\alpha_1 = 2b_1 + 2b_2 - a_0 = 0$ sein); β_1 bleibt dabei willkürlich und kann gleich Null gesetzt werden, da in diesem Falle die reduzierte Gleichung als Partikularlösung die ganze Funktion ersten Grades

$$\overline{y}_x = \beta_1\left(x-\frac{b_1}{a_0}\right)$$

besitzt, die zur Lösung der vollständigen Gleichung hinzugefügt werden kann; alsdann folgt

$$\beta_0=\frac{\alpha_0}{a_0}-\frac{c_2\,\alpha_1}{a_0\left(b_1+b_2-\frac{a_0}{2}\right)}.$$

Besteht dagegen die Beziehung (14) *nicht*, so setze man

$$y_x=\beta_0+\beta_2\binom{x}{2}+z_x,$$

worin

$$\beta_2=\frac{\alpha_2}{\frac{a_0}{2}+a_1+a_2},\quad \beta_0=\frac{\alpha_0}{a_0}-\frac{c_2\,\alpha_2}{a_0\left(\frac{a_0}{2}+a_1+a_2\right)}$$

ist; dann genügt z_x der Gleichung

$$P(z_x)=\left(\alpha_1-\left(b_1+b_2-\frac{a_0}{2}\right)\beta_2\right)x.$$

3. $$\frac{a_0}{2}+a_1+a_2=0,\quad a_0+a_1=0.$$

Dann muß $a_2 \neq 0$ sein, da sonst $a_1 = a_0 = 0$ wäre; daher kann durch die Substitution $x = \xi + \alpha$, $y_{\xi+\alpha} = u_\xi$, worin α eine Wurzel der Gleichung $a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$ ist, die Gleichung (11) in eine derselben Art transformiert werden, in welcher $c_2 = 0$ ist; wir können also $c_2 = 0$ voraussetzen.

α) $$b_1+b_2-\frac{a_0}{2}\neq 0.$$

Die reduzierte Gleichung $P(y_x) = 0$ besitzt wie vorher die Partikularlösung

$$\overline{y}_x=\beta_1\left(x-\frac{b_1}{a_0}\right).$$

Setzt man

$$y_x = \beta_0 + \beta_2 \binom{x}{2} + v_x,$$

worin

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1}{b_1 + b_2 - \frac{a_0}{2}}, \quad \beta_0 = \frac{\alpha_0}{a_0}$$

ist, so genügt v_x der Differenzengleichung

$$P(v_x) = \alpha_2 x^2.$$

β) $$b_1 + b_2 - \frac{a_0}{2} = 0.$$

Die reduzierte Gleichung $P(y_x) = 0$ besitzt die beiden Partikularlösungen

$$\overline{y}_x^{(1)} = \beta_2 \frac{x(x-1)}{2}, \quad \overline{y}_x^{(2)} = \beta_1 \left(x - \frac{b_1}{a_0}\right),$$

sodaß ihre *allgemeine* Lösung eine ganze rationale Funktion von x ist. Hier kann nur durch die Substitution

$$y_x = \frac{\alpha_0}{a_0} + v_x$$

das Glied α_0 der rechten Seite von (11) zum Verschwinden gebracht werden; aber dafür gestaltet sich die Lösung der Gleichung (11) mittels Variation der „Konstanten" durch die Kenntnis *zweier* Lösungen der reduzierten Gleichung besonders einfach. Da hier $a_1 = -a_0$, $a_2 = \frac{a_0}{2}$, $b_1 + b_2 = \frac{a_0}{2}$ und nach den angegebenen Transformationen $c_2 = 0$, $\alpha_0 = 0$ ist, so lautet die transformierte Gleichung (11), wenn man noch durch a_2 dividiert und $\frac{b_2}{a_2} = b$, $\frac{\alpha_1}{a_2} = A_1$, $\frac{\alpha_2}{a_2} = A_2$ setzt:

$$(11^*) \quad (x^2 + bx)\Delta^2 y_x - (2x + b - 1)\Delta y_x + 2y_x = A_1 x + A_2 x^2.$$

Zwei Partikularlösungen der reduzierten Gleichung sind

$$y_x^{(1)} = \frac{x(x-1)}{2}, \quad y_x^{(2)} = x + \frac{b-1}{2};$$

daher lautet die allgemeine Lösung von (11*)[1]:

$$(15) \qquad y_x = y_x^{(1)} \sum \frac{A_1 + A_2 x}{x + b} z_{x+1}^{(1)} + y_x^{(2)} \sum \frac{A_1 + A_2 x}{x + b} z_{x+1}^{(2)};$$

darin ist

$$z_x^{(1)} = -\frac{y_x^{(2)}}{D_x}, \quad z_x^{(2)} = \frac{y_x^{(1)}}{D_x},$$

wo

$$D_x = y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} = -\frac{1}{2} x(x+b);$$

also:

$$z_x^{(1)} = \frac{2x+b-1}{x(x+b)}, \quad z_x^{(2)} = -\frac{x-1}{x+b}.$$

Der Ausdruck unter der ersten Summe Σ in (15) lautet, in Partialbrüche zerlegt,

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{(x+b)(x+b+1)};$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (11*) hat daher die Form

$$y_x = \omega_1 \frac{x(x-1)}{2} + \omega_2\left(x + \frac{b-1}{2}\right) + R(x) + G_1(x)\,\Psi(x) + G_2(x)\,\Psi(x+b);$$

darin sind ω_1 und ω_2 willkürliche „Konstanten“, $R(x)$ eine rationale Funktion, $G_1(x)$ und $G_2(x)$ ganze rationale Funktionen von x und $\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$.[1] Insbesondere ergibt sich für $b = 1$, $A_1 = A_2 = 1$ als allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x(x+1)\Delta^2 y_x - 2x\Delta y_x + 2y_x = x + x^2$$

die Funktion

$$y_x = 2 - (x-1)^2 + x(x+1)\,\Psi(x) + \omega_1 x + \omega_2 x^2.$$

B. Die rechte Seite ist von der Form $\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\,dt$.[2]

Wir wollen auch hier, wie bei den Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, den Fall betrachten, daß die rechte Seite von der Form $\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\,dt$ ist, die vorgelegte Gleichung also lautet (in der symbolischen Schreibweise):

$$[\varphi(D) + x\psi(D)](y_x) = \int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\,dt.$$

Wir setzen wieder

$$y_x = \int_{t_1}^{t_2} t^{x-1}\,V(t)\,dt$$

---

1) Vgl. *1. Kap.*, II, C: *Markoff*, **1.**, S. 106; *Nielsen*, **1.**, S. 261; log bedeutet immer den *natürlichen* Logarithmus.

2) *Heymann*, **1.**, l. c.; W.

in die gegebene Gleichung ein und erhalten ähnlich wie früher unter a):

$$\left[t^x \psi(t)\, V(t)\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} t^{x-1}\, dt \left[t \frac{d\,(\psi(t)\, V(t))}{dt} - \varphi(t)\, V(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\, dt.$$

Wir bestimmen nun $V(t)$ durch die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$t \frac{d\,(\psi(t)\, V(t))}{dt} - \varphi(t)\, V(t) = - F(t),$$

aus welcher sich mit Benutzung der früheren Bezeichnungen als Partikularintegral

$$V(t) = \chi(t) \int_t^{t_0} \vartheta(t)\, F(t)\, dt \quad (t_0 \text{ beliebige Konstante})$$

ergibt, worin

$$\chi(t) = t^{\beta_0}(t-\alpha_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (t-\alpha_n)^{\beta_n - 1} : a_n,$$
$$\vartheta(t) = t^{-\beta_0 - 1}(t-\alpha_1)^{-\beta_1} \ldots (t-\alpha_n)^{-\beta_n}$$

ist. Die Grenzen t_1 und t_2 müssen nun so bestimmt werden, daß

$$\left[t^{x+\beta_0}(t-\alpha_1)^{\beta_1} \ldots (t-\alpha_n)^{\beta_n} \int_t^{t_0} \vartheta(t)\, F(t)\, dt\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

wird; dann stellt

$$y_x = \int_{t_1}^{t_2} \left[t^{x-1} \chi(t) \int_t^{t_0} \vartheta(t)\, F(t)\, dt\right] dt$$

eine Lösung der vorgelegten Gleichung dar, falls das Integral überhaupt einen Sinn hat.

Ist das zweite Glied der vollständigen *Laplace*schen Gleichung eine *beliebige* Funktion $f(x)$, so erhebt sich die Frage, ob man eine Funktion $F(t)$ durch die Funktionalgleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\, dt = f(x)$$

bestimmen kann; ähnliche Funktionalgleichungen sind durch die Untersuchungen von *Volterra*, *Le Roux*, *Pincherle*, *Mellin*, besonders aber von *Fredholm*, *Hilbert*, *Erh. Schmidt* u. a. (die sogenannten „Integralgleichungen") neuerdings in den Vordergrund des Interesses getreten; doch würde es den Rahmen dieses Buches überschreiten, näher auf dieselben einzugehen.

Beispiel:[1]) Die Differenzengleichung

$$(\alpha + x)(\beta + x) y_{x+2} + (a + bx) y_{x+1} + c y_x = f(x)$$

1) *Heymann*, **1.**, S. 315.

wird zunächst durch die Substitution

$$y_x = \frac{u_x}{\Gamma(\alpha + x - 1)}$$

in die vollständige *Laplace*sche Gleichung

$$(\beta + x) u_{x+2} + (a + bx) u_{x+1} + c(\alpha + x - 1) u_x = f(x)\,\Gamma(\alpha + x)$$

transformiert; die Lösung derselben hängt also von der Funktionalgleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\, dt = f(x)\,\Gamma(\alpha + x)$$

ab. Ist insbesondere $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x, welche nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen im allgemeinen auf eine lineare Funktion $\varkappa_0 + \varkappa_1 x$ reduziert werden kann, so zerfällt diese Funktionalgleichung mit Rücksicht auf die Identität

$$(\varkappa_0 + \varkappa_1 x)\,\Gamma(\alpha + x) = \varkappa\,\Gamma(\alpha + x) + \varkappa_1\,\Gamma(\alpha + x + 1) \quad (\varkappa = \varkappa_0 - \alpha\varkappa_1)$$

in zwei ganz gleichartige, deren erste

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{x-1} F(t)\, dt = \varkappa\,\Gamma(\alpha + x)$$

durch

$$F(t) = \varkappa t^{\alpha} e^{-t}; \quad t_1 = 0,\ t_2 = \infty \quad (\Re(\alpha + x) > 0)$$

befriedigt wird.

Neuntes Kapitel.

Verhalten der Lösungen homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen.

I. Der Satz von *Poincaré.*[1]

Um den Sinn des *Poincaré*schen Satzes zu verstehen, müssen wir einige Bemerkungen vorausschicken[2]: Es sei gegeben eine homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \cdots + a_n y_x = 0;$$

die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

seien alle von einander verschieden und zwar

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3| > \cdots > |\alpha_n|.\text{[3]}$$

Dann lautet die allgemeine Lösung unserer Differenzengleichung[4]:

$$y_x = \omega_1 \alpha_1^x + \omega_2 \alpha_2^x + \cdots + \omega_n \alpha_n^x,$$

worin die ω_k willkürliche „Konstanten" (d. h. periodische Funktionen mit der Periode 1) sind; wir wollen aber hier der Einfachheit wegen nur solche Lösungen betrachten, in denen die ω_k wirkliche Konstanten sind, die wir demgemäß mit c_k bezeichnen. Es ist daher

$$\frac{y_{x+1}}{y_x} = \frac{\alpha_1^{x+1}\left(c_1 + c_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{x+1} + \cdots + c_n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{x+1}\right)}{\alpha_1^x\left(c_1 + c_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^x + \cdots + c_n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^x\right)}.$$

Geht nun x auf der positiven reellen Achse ins Unendliche, so wird im allgemeinen

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_1.$$

1) *Poincaré,* **1.**; *W.* 2) Vgl. *Perron,* **2.**, § 1.
3) $|\alpha|$ bedeutet den absoluten Wert von α. 4) *7. Kap.*, I.

Nur *ausnahmsweise*, wenn nämlich $c_1 = 0$ ist, also für etwas weniger allgemeine Lösungen wird $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_2$; für noch weniger allgemeine Lösungen, in denen auch $c_2 = 0$ ist, wird $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_3$ usf.; für die *einzige* Lösung $y_x = c_n \alpha_n^x$[1]) ist $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_n$. *Der Quotient* $\frac{y_{x+1}}{y_x}$ *strebt also, wenn x ins Unendliche wächst, im allgemeinen der größten Wurzel der charakteristischen Gleichung zu.*

Dies gilt auch noch, wenn einige Wurzeln einander gleich sind: es sei z. B. $n = 5$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$, $|\alpha_1| > |\alpha_3|$; dann ist[2])

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 x \alpha_1^x + c_3 \alpha_3^x + c_4 x \alpha_3^x + c_5 x^2 \alpha_3^x,$$

also

$$\frac{y_{x+1}}{y_x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \alpha_1 \frac{\frac{c_1}{x+1} + c_2 + \frac{c_3}{x+1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{x+1} + c_4 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{x+1} + c_5 (x+1) \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{x+1}}{\frac{c_1}{x} + c_2 + \frac{c_3}{x}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{x} + c_4 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{x} + c_5\, x \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{x}},$$

und daher wegen $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} < 1$, falls nicht gleichzeitig $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ ist,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_1; \quad \left(\text{wenn } c_1 = c_2 = 0, \text{ so ist } \lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_3\right).$$

Wenn zwei von einander verschiedene Wurzeln gleichen absoluten Betrag haben, so gibt es Lösungen, für die der Quotient $\frac{y_{x+1}}{y_x}$ für $\lim x = \infty$ überhaupt keinem Grenzwert zustrebt; denn ist etwa $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, so ist $y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 \alpha_2^x$ eine solche Lösung, für die der Grenzwert $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x}$ nicht existiert; aber auch in diesem Falle gilt noch der obige Satz, wenn die Wurzeln, welche gleichen absoluten Betrag besitzen, nicht diejenigen vom größten absoluten Betrage sind. — Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir zu dem Satze von *Poincaré*.

A. Alle Wurzeln der „charakteristischen Gleichung" haben verschiedene absolute Beträge.

Lehrsatz: Wenn in einer homogenen linearen Differenzengleichung

$$\text{(A)} \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(0)} y_x = 0$$

die Koeffizienten $p_x^{(0)}, p_x^{(1)}, \ldots, p_x^{(n-1)}$ *endlichen Werten* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$

---

1) Lösungen, die sich nur durch eine multiplikative Konstante unterscheiden, werden nicht als verschieden angesehen.

2) 7. Kap., I.

zustreben, sobald die Veränderliche x auf der positiven reellen Achse ins Unendliche geht[1]), *und wenn die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der „charakteristischen Gleichung“*

(B) $$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

dem absoluten Werte nach von einander verschieden sind, und zwar

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_n|,$$

so ist im allgemeinen

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_1 .$$

Beweis: Wir führen den Beweis für $n = 3$; dann lautet die vorgelegte Differenzengleichung

(1) $$u_{x+3} + p_x^{(2)} u_{x+2} + p_x^{(1)} u_{x+1} + p_x^{(0)} u_x = 0,$$

worin $\lim\limits_{x=\infty} p_x^{(k)} = a_k$ $(k = 0, 1, 2)$ ist. Die Wurzeln α, β, γ der Gleichung

(2) $$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

seien von einander verschieden und zwar $|\alpha| > |\beta| > |\gamma|$.

Wir setzen nun:

(3) $$u_x = X_x + Y_x + Z_x,$$

(4) $$u_{x+1} = \alpha X_x + \beta Y_x + \gamma Z_x,$$

(5) $$u_{x+2} = \alpha^2 X_x + \beta^2 Y_x + \gamma^2 Z_x;$$

1) Das ist z. B. der Fall, wenn die Differenzengleichung die Form hat

$$P_x^{(n)} y_{x+n} + P_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + P_x^{(0)} y_x = 0,$$

worin die $P_x^{(k)}$ Polynome gleichen Grades in x sind. — Ist allgemeiner $P_x^{(n-k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ ein Polynom vom Grade $l_k = l_0 + kr$, so kann man durch eine Substitution von der Form

$$y_x = \prod_{i=1}^{r} \Gamma(x - b_i) \cdot u_x$$

erreichen, daß alle Koeffizienten denselben Grad $l_0 + nr = l_n$ besitzen; wählt man die b_i als Wurzeln von $P_x^{(0)} = 0$, so hebt sich der Faktor $(x - b_1) \ldots (x - b_r)$ heraus, und alle Koeffizienten haben den Grad $l_0 + (n-1)r = l_n - r$. Ist $l_k = l_0 - kr$ $(l_0 > nr)$, so erreicht man durch die Substitution

$$y_x = \frac{u_x}{\prod\limits_{i=1}^{r} \Gamma(x - b_i - n + 1)},$$

worin nun die b_i Wurzeln der Gleichung $P_x^{(n)} = 0$ sind, daß sämtliche Koeffizienten den Grad $l_0 - r$ besitzen. (W.)

also:

$$u_{x+1} = X_{x+1} + Y_{x+1} + Z_{x+1}, \tag{6}$$

$$u_{x+2} = \alpha X_{x+1} + \beta Y_{x+1} + \gamma Z_{x+1}, \tag{7}$$

$$u_{x+3} = \alpha^2 X_{x+1} + \beta^2 Y_{x+1} + \gamma^2 Z_{x+1}. \tag{8}$$

Aus (4) und (6) bzw. (5) und (7) folgt:

$$X_{x+1} - \alpha X_x + Y_{x+1} - \beta Y_x + Z_{x+1} - \gamma Z_x = 0,$$

$$\alpha(X_{x+1} - \alpha X_x) + \beta(Y_{x+1} - \beta Y_x) + \gamma(Z_{x+1} - \gamma Z_x) = 0;$$

daher ist, wenn K einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,

$$X_{x+1} = \alpha X_x + (\beta - \gamma) K, \quad Y_{x+1} = \beta Y_x + (\gamma - \alpha) K, \tag{9}$$
$$Z_{x+1} = \gamma Z_x + (\alpha - \beta) K.$$

Ferner ergibt sich aus (1), (3), (4), (5), (8), (9), wenn noch

$$z^3 + p_x^{(2)} z^2 + p_x^{(1)} z + p_x^{(0)} = P(z)$$

gesetzt wird:

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) K = P(\alpha) X_x + P(\beta) Y_x + P(\gamma) Z_x.$$

Setzt man diesen Wert für K in (9) ein und zur Abkürzung $P(\alpha) = A$, $P(\beta) = B$, $P(\gamma) = C$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$X_{x+1} = \alpha X_x + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} (A X_x + B Y_x + C Z_x), \tag{10}$$

$$Y_{x+1} = \beta Y_x + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} (A X_x + B Y_x + C Z_x), \tag{11}$$

$$Z_{x+1} = \gamma Z_x + \frac{1}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} (A X_x + B Y_x + C Z_x).[1] \tag{12}$$

Für genügend große x werden die Größen A, B, C beliebig klein; wir können daher eine positive Zahl ε so wählen, daß, wenn gleichzeitig

$$\left|\frac{X}{Y}\right|, \ \left|\frac{Y}{X}\right|, \ \left|\frac{X}{Z}\right|, \ \left|\frac{Y}{Z}\right|^{2)} > \varepsilon \text{ ist, } \left|\frac{Y_{x+1}}{X_{x+1}} : \frac{Y_x}{X_x}\right| < 1 \text{ wird;}$$

$$\text{wenn } \left|\frac{X}{Z}\right|, \ \left|\frac{Z}{X}\right|, \ \left|\frac{X}{Y}\right|, \ \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon \text{ ist, } \left|\frac{Z_{x+1}}{X_{x+1}} : \frac{Z_x}{X_x}\right| < 1 \text{ wird;}$$

$$\text{wenn } \left|\frac{Y}{Z}\right|, \ \left|\frac{Z}{Y}\right|, \ \left|\frac{Y}{X}\right|, \ \left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon \text{ ist, } \left|\frac{Z_{x+1}}{Y_{x+1}} : \frac{Z_x}{Y_x}\right| < 1 \text{ wird.}$$

1) In der Arbeit von *Poincaré*, **1.**, sind diese Gleichungen unrichtig angegeben.

2) Der Index x ist der Einfachheit wegen fortgelassen worden.

Es existiert nämlich eine von x abhängige positive Größe δ derart, daß z.B. die mit $\left|\frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}\right|$ bzw. $\left|\frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}\right|$ multiplizierten Größen $|A|$, $|B|$, $|C|$ für genügend große x sämtlich kleiner als δ werden und $\lim\limits_{x=\infty}\delta = 0$ ist; daher wird nach den obigen Voraussetzungen der Quotient

$$Q \equiv \left|\frac{Y_{x+1}}{X_{x+1}}\right| : \left|\frac{Y_x}{X_x}\right| < \frac{|\beta| + \delta\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)}{|\alpha| - \delta\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)} \text{ (aus (10) und (11)).}$$

Wählt man nun eine positive Größe σ derart, daß $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \sigma < 1$ ist, und bestimmt ε durch die Gleichung

$$\delta\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)(1+\sigma) = \sigma|\alpha| - |\beta|,$$

so wird auch $\lim\limits_{x=\infty}\varepsilon = 0$, und es ist

$$Q < \sigma < 1.^{1)}$$

Analoges gilt für die beiden anderen Quotienten.

Wir nehmen nun x so groß an, daß die positive Zahl ε kleiner als 1 wird. Wenn dann H die größere der beiden Größen $\left|\frac{Y}{X}\right|$ und $\left|\frac{Z}{X}\right|$ bedeutet, so ist H eine Funktion von x, welche in dem Intervall zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ stets abnimmt.[2]) In der Tat können mit Rücksicht auf die Ungleichungen $\varepsilon < H < \frac{1}{\varepsilon}$ und $0 \leqq \varepsilon < 1$ zwei Fälle eintreten:

1. Fall:

$$H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \left|\frac{Z}{X}\right|;$$

dann ist

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \frac{1}{H} > \varepsilon, \quad \left|\frac{Y}{X}\right| = H > \varepsilon, \quad \left|\frac{X}{Z}\right| > \left|\frac{X}{Y}\right| > \varepsilon, \quad \left|\frac{Y}{Z}\right| > 1 > \varepsilon,$$

also nach Obigem:

$$\left|\frac{Y_{x+1}}{X_{x+1}}\right| : \left|\frac{Y_x}{X_x}\right| < 1;$$

d. h. $\left|\frac{Y_x}{X_x}\right|$ und daher H nimmt zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ stets ab.

2. Fall:

$$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \left|\frac{Y}{X}\right|;$$

dann ist

$$\left|\frac{X}{Y}\right| > \left|\frac{X}{Z}\right| \left(=\frac{1}{H}\right) > \varepsilon, \quad \left|\frac{Z}{X}\right| = H > \varepsilon, \quad \left|\frac{Z}{Y}\right| > 1 > \varepsilon,$$

also

$$\left|\frac{Z_{x+1}}{X_{x+1}}\right| : \left|\frac{Z_x}{X_x}\right| < 1;$$

d. h. $\left|\frac{Z_x}{X_x}\right|$ und daher H nimmt zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ stets ab.

Daraus folgt, da $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon = 0$, daß H mit unbegrenzt wachsendem x gegen Null konvergiert[1]), es sei denn, daß H von einem gewissen x an stets größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ bleibt, in welchem Ausnahmefalle H mit x ins Unendliche wächst. In diesem Falle nimmt $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ in dem Intervall zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ stets ab; denn es ist mit Rücksicht auf die Ungleichung $\varepsilon < \left|\frac{Z}{Y}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$ entweder:

$$1.\ H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \quad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon, \quad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

$$\left|\frac{Z}{X}\right| = \left|\frac{Z}{Y}\right| \cdot \left|\frac{Y}{X}\right| > 1 > \varepsilon,$$

oder:

$$2.\ H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \quad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon, \quad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

$$\left|\frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{Y}{Z}\right| \cdot \left|\frac{Z}{X}\right| > 1 > \varepsilon;$$

also in beiden Fällen nach Obigem

$$\left|\frac{Z_{x+1}}{Y_{x+1}}\right| : \left|\frac{Z_x}{Y_x}\right| < 1,$$

d. h. $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ nimmt zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ stets ab; daher konvergiert $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ mit unbegrenzt wachsendem x im allgemeinen gegen Null und nur ausnahmsweise, wenn es nämlich von einem gewissen x an stets größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ bleibt, gegen ∞.

Es sind also drei Fälle möglich:

1. *Allgemeiner Fall:*

$\lim H = 0$[2]), $\lim \left|\frac{Z}{X}\right| = \lim \left|\frac{Y}{X}\right| = 0$; $\lim \frac{u_{x+1}}{u_x} = \alpha$ (aus (3) und (4)).

---

1) Zunächst gilt dies nur, wenn x in ganzzahligen Intervallen $x+\mu$ ($\mu=1, 2, 3, \ldots$) wächst; da diese Abnahme von H aber für *jedes* x (von einer gewissen Stelle an) statt hat, so kommt in der Tat H für genügend große x der Null beliebig nahe. Bleibt beständig $H < \varepsilon$, so konvergiert wegen $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon = 0$ ebenfalls H mit unbegrenzt wachsendem x gegen Null.

2) $\lim \equiv \lim\limits_{x=\infty}$.

2. *Ausnahmefall:*

$$\lim H = \infty, \ \lim \left|\frac{X}{Y}\right| = \lim \left|\frac{Z}{Y}\right| = 0; \ \lim \frac{u_{x+1}}{u_x} = \beta.$$

3. *Noch größerer Ausnahmefall:*

$$\lim H = \lim \left|\frac{Z}{Y}\right| = \infty, \ \lim \left|\frac{X}{Z}\right| = \lim \left|\frac{Y}{Z}\right| = 0; \ \lim \frac{u_{x+1}}{u_x} = \gamma.$$

Q. e. d.

Dieselbe Schlußweise läßt sich auch auf Differenzengleichungen höherer als dritter Ordnung anwenden, doch ist dann naturgemäß die Zahl der zu unterscheidenden Fälle eine viel größere. *Perron*[1]) hat für ganzzahlige $x \geqq 0$ den Beweis des *Poincaré*schen Satzes durch Methoden, die der Theorie der rekurrenten Reihen adäquat sind, für die n^{te} Ordnung wirklich durchgeführt, wobei allerdings fraglich bleibt, welcher Wurzel der „charakteristischen Gleichung" der Quotient $\frac{u_{x+1}}{u_x}$ im allgemeinen zustrebt; in derselben Arbeit gibt er jedoch durch vollständige Induktion noch einen zweiten Beweis, der zwar viel komplizierter ist, dafür aber auch mehr leistet, indem er den *Poincaré*schen Satz folgendermaßen präzisiert: *Die Differenzengleichung* (A) *besitzt unter der Voraussetzung* $p_x^{(0)} \neq 0$ (*für* $x = 0, 1, 2, \ldots$) n *Fundamentallösungen* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ *von der Art, daß*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}^{(i)}}{y_x^{(i)}} = \alpha_i$$

ist. Daraus folgt, da für $i < k$ nach Voraussetzung $|\alpha_i| > |\alpha_k|$ ist,

$$\lim_{x=\infty} \left|\frac{y_{x+1}^{(k)}}{y_{x+1}^{(i)}} : \frac{y_x^{(k)}}{y_x^{(i)}}\right| = \left|\frac{\alpha_k}{\alpha_i}\right| < 1,$$

also:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_x^{(k)}}{y_x^{(i)}} = 0,$$

und daher:

$$\lim_{x=\infty} \frac{c_\nu y_{x+1}^{(\nu)} + c_{\nu+1} y_{x+1}^{(\nu+1)} + \cdots + c_n y_{x+1}^{(n)}}{c_\nu y_x^{(\nu)} + c_{\nu+1} y_x^{(\nu+1)} + \cdots + c_n y_x^{(n)}} {}^{2)} = \alpha_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

---

1) *Perron*, **1.**

2) Bei der Beschränkung auf ganzzahlige x sind die willkürlichen Größen c_k wirkliche Konstanten.

Insbesondere folgt für $\nu = n$, daß für *eine* (bis auf einen konstanten Faktor) *einzige* Partikularlösung $y_x^{(n)}$ die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}^{(n)}}{y_x^{(n)}} = \alpha_n$$

gilt, worin α_n die *kleinste* Wurzel der „charakteristischen Gleichung" ist, entsprechend unserer Bemerkung über die Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Diesen Satz hat (für den Fall, daß die Koeffizienten $p_x^{(k)}$ rationale Funktionen von x sind) bereits *Pincherle*[1]) gefunden; er nennt die zur kleinsten Wurzel der Gleichung (B) gehörige Partikularlösung die *„ausgezeichnete Lösung"*.

B. Die charakteristische Gleichung besitzt Wurzeln von gleichem absoluten Betrage.

Aus dem Beweisgange des *Poincaré*schen Satzes geht hervor, daß derselbe auch noch gilt, wenn einige Wurzeln der Gleichung (B) gleichen absoluten Betrag besitzen, vorausgesetzt, daß dies nicht Wurzeln vom *größten* absoluten Betrage sind, also in unserem Falle, wenn $|\beta| = |\gamma|$, $|\alpha| > |\beta|$ ist; auch hier ist im allgemeinen (d. h. wenn

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{x+1}}{u_x} = \alpha.$$

ist nicht nur $|\beta| = |\gamma|$, sondern auch $\beta = \gamma$, so setze man:

$$u_x = X_x + Y_x + Z_x,$$

$$u_{x+1} = \alpha X_x + \beta\left(1 + \frac{1}{x}\right) Y_x + \beta Z_x,$$

$$u_{x+2} = \alpha^2 X_x + \beta^2\left(1 + \frac{2}{x}\right) Y_x + \beta^2 Z_x,$$

woraus

$$u_{x+1} = X_{x+1} + Y_{x+1} + Z_{x+1},$$

$$u_{x+2} = \alpha X_{x+1} + \beta\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) Y_{x+1} + \beta Z_{x+1},$$

$$u_{x+3} = \alpha^2 X_{x+1} + \beta^2\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) Y_{x+1} + \beta^2 Z_{x+1}$$

folgt. Setzt man ferner:

$$\alpha^3 + p_x^{(2)} \alpha^2 + p_x^{(1)} \alpha + p_x^{(0)} = A,$$

$$\beta^3 + p_x^{(2)} \beta^2 + p_x^{(1)} \beta + p_x^{(0)} = B,$$

$$3\beta^2 + 2p_x^{(2)} \beta + p_x^{(1)} \qquad = C,$$

---

1) *Pincherle*, 3.

so ergibt sich

$$X_{x+1} = \alpha X_x + A',$$
$$Y_{x+1} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \beta Y_x + B',$$
$$Z_{x+1} = \beta Z_x + C',$$

worin A', B', C' lineare Funktionen von A, B, C sind, deren Koeffizienten von X_x, Y_x und Z_x abhängen. Die Größen A, B, C konvergieren gegen Null, wenn x ins Unendliche wächst, und, wie die vorigen Betrachtungen zeigen, im allgemeinen auch A', B', C'; daher ist im allgemeinen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{Y_x}{X_x} = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{Z_x}{X_x} = 0 : \lim_{x=\infty} \frac{u_{x+1}}{u_x} = \alpha.$$

Dagegen gilt diese Schlußweise nicht mehr, wenn einige Wurzeln vom größten absoluten Betrage einander (absolut genommen) gleich sind, wenn also $\alpha = \beta > \gamma$ ist (dahin gehört auch der Fall $\alpha = \beta$)[1]. In der Tat existiert in diesem Falle, wie *Perron*[2]) an geeigneten Beispielen zeigt, für die allgemeine Lösung überhaupt kein derartiger Grenzwert, und wenn *alle* Wurzeln gleichen absoluten Betrag haben (bzw. einander gleich sind), so kann es vorkommen, daß für *keine einzige Lösung* ein solcher Grenzwert existiert (im Gegensatze zu den Differenzengleichungen mit *konstanten* Koeffizienten).

Aber selbst in diesen Fällen gilt noch der folgende allgemeine *Satz*[3]): *Ist a eine Zahl, die dem absoluten Werte nach größer ist als alle Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung von* (A), *so ist* $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y_x}{a^x} = 0$.

Beweis[4]): Man kann zwei Zahlen b und c derart angeben, daß $c < b < a$ und c größer als der absolute Betrag sämtlicher Wurzeln der Gleichung (B) ist. Alsdann betrachten wir diejenige Differenzengleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(\mathrm{A}^*) \qquad Q(u_x) \equiv R\,P(u_x) = 0, \quad (R(u_x) \equiv u_{x+1} - r_x u_x),$$

welche außer den sämtlichen Lösungen der Gleichung (A) noch die Lösung c^x besitzt, sodaß ihr allgemeines Integral lautet:

$$u_x = \omega c^x + y_x,$$

worin ω eine willkürliche „Konstante" und y_x das allgemeine Integral

1) Die entsprechenden Entwickelungen von *Poincaré* (l. c.) sind daher unrichtig.

2) *Perron*, **2.**, § 2, und eine briefliche Mitteilung an den Verf. W.

3) *Poincaré*, l. c.

von (A) ist[1]). Die zu (A*) gehörige „charakteristische" Gleichung lautet

$$(B^*)\qquad (z-c)(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) = 0$$

und besitzt außer den Wurzeln der Gleichung (B) noch die Wurzel c, die dem absoluten Betrage nach größer ist als alle anderen; folglich gilt nach dem Hauptsatze für das allgemeine Integral u_x von (A*) die Beziehung $\lim\limits_{x=\infty} \frac{u_{x+1}}{u_x} = c$. Für einige Partikularlösungen von (A*) kann allerdings eine Ausnahme von dieser Regel eintreten, insbesondere für die Lösungen der Gleichung (A) selber.

Von einem gewissen Werte x_0 der Veränderlichen x an ist nun

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} < b\,,$$

und daher für $x = x_0 + \nu$ (ν positive ganze Zahl):

$$u_x < u_{x_0} b^{x-x_0}\,,$$

also

$$\frac{u_x}{a^x} < u_{x_0} b^{-x_0} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^x;$$

folglich ist, da $\frac{b}{a} < 1$,

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_x}{a^x} = 0,$$

wenn x in ganzzahligen Intervallen wächst.[2])

Diese Beziehung gilt auch für die oben erwähnten Ausnahmelösungen, da eine solche Lösung stets als Differenz zweier *nicht* exzeptioneller Lösungen von (A*) dargestellt werden kann; sie gilt also insbesondere auch für *alle* Lösungen der Gleichung (A), d. h. es ist $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y_x}{a^x} = 0$. Q. e. d.

Für den Fall, daß alle oder einige Wurzeln der Gleichung (B) gleichen absoluten Betrag besitzen, haben *Ford*[3]) und *Perron*[4]) nach verschiedenen Richtungen tiefgehende Untersuchungen angestellt; dieselben in extenso wiederzugeben, würde den Rahmen dieses Buches

---

1) Vgl. *2. Kap.*, *VI*; es ergibt sich

$$r_x = c\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_{x+1}^{(k)}\, c^{x+k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_x^{(k)}\, c^{x+k}}\,,\quad \text{also } \lim_{x=\infty} r_x = c\,.$$

2) Vgl. die Bemerkung 1 am Schlusse des Werkes.

3) *Ford*, **1.** 4) *Perron*, **2.**, § 3.

weit überschreiten, doch sollen wenigstens die beiden Haupttheoreme, die sich allerdings nur auf ganzzahlige $x \geqq 0$ beziehen, ohne Beweis hier mitgeteilt werden.

I. *Satz von Ford: Wenn in der Differenzengleichung* (A) *der Koeffizient* $p_x^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ *mit unendlich wachsendem* x *derart gegen die Grenze* a_k *konvergiert, daß die Differenz* $p_x^{(k)} - a_k$ *von derselben Ordnung unendlich klein wird wie der Ausdruck* $\frac{\tau(x)}{x}$, *wo* $\tau(x)$ *eine solche positive Funktion von* x *ist, daß die Reihe* $\sum\limits_{x_1 = x+1}^{\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$ *konvergiert* $\left(z. B.\ \tau(x) = \frac{1}{x^{\nu}}, \frac{1}{(\ln x)^{1+\nu}} (\nu > 0)\ usf.\right)$, *wenn ferner* $a_0 \neq 0$ *ist und die Wurzeln* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *der Gleichung* (B) *von einander verschieden sind, aber alle denselben Modul* ϱ *haben, so nimmt die allgemeine Lösung von* (A) *für ganzzahlige Werte von* x, *die größer sind als eine bestimmte Zahl, die Form an:*

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 \alpha_2^x + \cdots + c_n \alpha_n^x + \varrho^x \varepsilon_x,$$

worin $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *willkürliche Konstanten sind, während* ε_x *für* $x = \infty$ *von derselben Ordnung unendlich klein wird wie der Ausdruck* $\sum\limits_{x_1 = x+1}^{\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$. — *Besitzen nicht alle Wurzeln denselben Modul und sind* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ $(h < n)$ *diejenigen, deren Modul den kleinsten Wert* ϱ *hat, so existiert eine Partikularlösung, die für ganzzahlige* x *oberhalb einer gewissen Grenze die Form*

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 \alpha_2^x + \cdots + c_h \alpha_h^x + \varrho^x \varepsilon_x$$

annimmt. (Sind nicht alle Wurzeln von einander verschieden, so treten entsprechende Modifikationen dieses Satzes ein.)

II. *Satz von Perron: Sind* $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ *die von einander verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung und ist* e_λ *die Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrage* q_λ, *wobei mehrfache Wurzeln auch ihrer Vielfachheit entsprechend zu zählen sind, sodaß* $e_1 + e_2 + \cdots + e_\sigma = n$ *ist, so besitzt die Differenzengleichung* (A), *sofern ihr letzter Koeffizient* $p_x^{(0)}$ *für alle (ganzzahligen nicht negativen)* x *von Null verschieden ist, ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in* σ *Klassen zerfallen, daß allgemein für die Integrale der* λ^{ten} *Klasse (deren Anzahl gleich* e_λ *ist) und deren lineare Verbindungen die Beziehung*

$$\limsup_{x=\infty} \sqrt[x]{|y_x|} = q_\lambda$$

statthat.

C. Die Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung sind zum Teil unendlich oder sämtlich gleich Null.[1])

Wir betrachten die Differenzengleichung

$$(C)\qquad P_x^{(n)} y_{x+n} + P_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + P_x^{(1)} y_{x+1} + P_x^{(0)} y_x = 0,$$

worin die $P_x^{(k)}$ Polynome vom Grade p_k sind; ist dann p_n kleiner als irgendein p_k $(k<n)$, so wird $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{P_x^{(k)}}{P_x^{(n)}}$ und daher im allgemeinen auch $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{y_{x+1}}{y_x}$ unendlich groß. In diesem Falle setzen wir, um die Ordnung des Unendlichwerdens zu eruieren,

$$y_x = \Gamma^{\mu}(x)\, u_x,$$

worin die reelle positive Konstante μ so zu bestimmen ist, daß $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{u_{x+1}}{u_x}$ endlich bleibt. Dadurch wird die Gleichung (C) transformiert in

$$u_{x+n} + \frac{p_x^{(n-1)}}{(x+n-1)^{\mu}} u_{x+n-1} + \frac{p_x^{(n-2)}}{[(x+n-1)(x+n-2)]^{\mu}} u_{x+n-2} + \cdots$$
$$+ \frac{\Gamma^{\mu}(x)\, p_x^{(0)}}{\Gamma^{\mu}(x+n)} u_x = 0,$$

worin $p_x^{(k)} = \dfrac{P_x^{(k)}}{P_x^{(n)}}$ ist. Die Größe μ muß nun so bestimmt werden, daß die Ausdrücke

$$(13)\qquad \frac{\Gamma^{\mu}(x+k)}{\Gamma^{\mu}(x+n)}\, p_x^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

für $x = \infty$ alle endlich bleiben, ohne alle gleich Null zu sein. Der Grad des Ausdruckes (13) in x ist

$$p_k - p_n - \mu(n-k);$$

daher muß für μ der kleinste Wert gewählt werden, der den Ungleichungen

$$(14)\qquad p_n + \mu n \geqq p_k + \mu k$$

genügt. Wenn man für μ gerade diesen *kleinsten* Wert wählt, so werden alle diese Ungleichungen erfüllt sein und mindestens eine derselben wird sich auf eine Gleichung reduzieren; daher werden alle Ausdrücke (13) für $x = \infty$ einer endlichen Grenze zustreben, die mindestens für einen dieser Ausdrücke nicht gleich Null ist.

1) *Poincaré*, **1.**, S. 238—239.

Man kann diesen kleinsten Wert von μ auf folgende Weise graphisch finden: man markiert alle Punkte, welche als Abszisse k und als Ordinate p_k haben; darauf konstruiert man das konvexe, sogenannte *Newton*sche Polygon, welches alle diese Punkte einschließt; diejenige Seite des Polygons, welche im Punkte (n, p_n) endigt, gibt dann durch ihren Richtungskoeffizienten (zur negativen Richtung der X-Achse) den gewünschten Wert von μ.

Beispiel:

$n = 5,\ p_0 = 4,\ p_1 = p_3 = 3,\ p_2 = p_4 = p_5 = 2.$

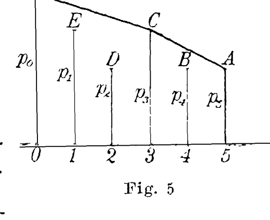


Fig. 5

Die Punkte A, B, C, D, E, F entsprechen bzw. den Polynomen $P_x^{(5)}, P_x^{(4)}, P_x^{(3)}, P_x^{(2)}, P_x^{(1)}, P_x^{(0)}$; der Richtungskoeffizient der Seite AC (gegen die negative X-Achse) gibt den gesuchten Wert von μ, also hier $\mu = \frac{1}{2}$.

Ist alsdann c_k die Grenze des Ausdruckes (13) für $x = \infty$, so bilde man die Gleichung

$$\text{(D)} \qquad z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0;$$

ist α diejenige Wurzel dieser Gleichung, welche den größten absoluten Wert hat, so ist im allgemeinen $\lim\limits_{x=\infty} \frac{u_{x+1}}{u_x} = \alpha$, also:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} x^{-\mu} = \alpha.\ ^{1)}$$

Ist ferner p_n größer als alle p_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, so sind alle Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung gleich 0, da

$$a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_0 = 0$$

ist. Um auch in diesem Falle das Verhalten des Quotienten $\frac{y_{x+1}}{y_x}$ für $x = \infty$ zu ermitteln, muß man wieder nach der oben angegebenen Methode den kleinsten Wert von μ aufsuchen, der den Ungleichungen (14) genügt; dieser Wert wird diesmal *negativ* sein. Setzt man

$$y_x = \Gamma^\mu(x)\, u_x,$$

1) *Perron* (**4.** u. **5.**, Spezialfälle **3.**, S. 462 u. 469; vgl. *Nörlund*, **3.**, S. 16—17) hat auch diesen Satz dahin präzisiert, daß *jede* Polygonseite durch ihren Richtungskoeffizienten einen Exponenten μ liefert; und zwar gibt die zu jeder Polygonseite gehörige Abszissendifferenz die Anzahl der Partikularlösungen an, die „zu dem betreffenden Exponenten μ gehören". (Die Bedeutung dieses Ausdruckes möge aus den zitierten Arbeiten von *Perron* und *Nörlund* ersehen werden.) In dem obigen Beispiel gehören zwei Lösungen zum Exponenten $\frac{1}{2}$ und drei zum Exponenten $\frac{1}{3}$.

so wird die Gleichung (C)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma^{\mu}(x+k)}{\Gamma^{\mu}(x+n)} p_x^{(k)} u_{x+k} = 0 \quad \left(p_x^{(n)} = 1\right);$$

man bilde nun wieder die Gleichung (D): ist dann α die Wurzel vom größten absoluten Betrage, so wird im allgemeinen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} x^{-\mu} = \alpha \quad (\mu \text{ ist negativ!}).$$

D. Der Grenzwert des Quotienten $\frac{y_{x+1}}{y_x}$ für $x = -\infty$; Verhalten der Adjungierten.[1])

In der Differenzengleichung

$$\cdots + p_x^{(0)} y_x = 0,$$

ionale *Funktionen von* x von gleichem grade sein sollen[2]), setzen wir

$$x = -t-n, \quad p_{-t-n}^{(k)} = q_t^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots n-1) \quad \text{und} \quad y_{-t} = u_t;$$

dann wird dieselbe:

$$u_t + q_t^{(n-1)} u_{t+1} + \cdots + q_t^{(0)} u_{t+n} = 0.$$

Da $\lim_{t=\infty} q_t^{(k)} = a_k$ ist, so lautet die „charakteristische" Gleichung:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + 1 = 0;$$

ihre Wurzeln sind reziprok zu den Wurzeln der Gleichung (B), und es ist:

$$\frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{\alpha_{n-1}} > \cdots > \frac{1}{\alpha_1}.$$

Daher wird nach dem Satze von *Poincaré* im allgemeinen:

$$\lim_{t=\infty} \frac{u_{t+n}}{u_{t+n-1}} = \frac{1}{\alpha_n};$$

1) *W.*

2) Allgemeiner können die $p_x^{(k)}$ in der Umgebung von $x = \infty$ konvergente Potenzreihen von der Form

$$p_x^{(k)} = a_k + \frac{a_{k_1}}{x} + \frac{a_{k_2}}{x^2} + \ldots \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sein.

$$\lim_{x=-\infty} \frac{y_x}{y_{x+1}} = \frac{1}{\alpha_n},$$

d. h.

$$\lim_{x=-\infty} \frac{y_{x+1}}{y_x} = \alpha_n .$$

Geht also x auf der negativen reellen Achse ins Unendliche, so konvergiert der Quotient $\frac{y_{x+1}}{y_x}$ im allgemeinen gegen die kleinste Wurzel der charakteristischen Gleichung. (Auch hier treten die früher angegebenen Präzisierungen ein; die volle Aufklärung des Sachverhaltes werden aber erst die Untersuchungen des 10. Kap., III bringen.)

Betrachten wir endlich die „Adjungierte“ zu (A) (3. Kap., IV, Gl. (6); $z_{x+1} = v_x$, $p_x^{(n-k)}$ statt $p_x^{(k)}$ gesetzt):

$$v_x + p_{x+1}^{(n-1)} v_{x+1} + p_{x+2}^{(n-2)} v_{x+2} + \cdots + p_{x+n}^{(0)} v_{x+n} = 0,$$

so ist auch hier:

$$\lim_{x=\infty} p_{x+k}^{(n-k)} = a_{n-k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

also die charakteristische Gleichung wie vorher:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + 1 = 0,$$

und daher im allgemeinen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{v_{x+1}}{v_x} = \frac{1}{\alpha_n},$$

$$\lim_{x=-\infty} \frac{v_{x-1}}{v_x} = \frac{1}{\alpha_1}.$$

II. Anwendungen des *Poincaré*schen Satzes.

A. Approximative Lösung homogener linearer Differenzengleichungen.[1])

Es sei vorgelegt die Differenzengleichung

(A) $$y_{x+n} + p_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots p_x^{(0)} y_x = 0,$$

in welcher die Koeffizienten $p_x^{(k)}$ endlichen Grenzen a_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) zustreben, wenn x auf der positiven reellen Achse ins Unendliche wandert. Die „charakteristische“ Gleichung der Adjungierten von (A):

(A′) $$v_x + p_{x+1}^{(n-1)} v_{x-1} + p_{x+2}^{(n-2)} v_{x+2} + \cdots + p_{x+n}^{(0)} v_{x+n} = 0$$

---

1) *Pincherle*, 7.

lautet (nach I, D d. Kap.):

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + 1 = 0;$$

von ihren Wurzeln ϱ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) möge eine einen größeren absoluten Betrag als alle anderen besitzen:

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \cdots \geqq |\varrho_n|.$$

Dann gilt nach dem Satze von *Poincaré* für das allgemeine Integral von (A′) die Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{v_{x+\nu+1}}{v_{x+\nu}} = \varrho_1,$$

und nach den Auseinandersetzungen des Abschnittes I, A d. Kap. kann man ein Fundamentalsystem von Integralen $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots, v_x^{(n)}$ der Gleichung (A′) derart auswählen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{v_{x+\nu+1}^{(k)}}{v_{x+\nu}^{(k)}}$$

für $k = 1$ gleich ϱ_1, dagegen für $k = 2, 3, \ldots, n$ gleich einer der anderen Wurzeln $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n$ wird.

Betrachten wir nun die Gleichung (A′) als die ursprüngliche Differenzengleichung, so ist ihre Adjungierte nach dem *3. Kap.*, IV, a), S. 85, die Gleichung (A) selber und $y_x^{(k)} = u_{x+1}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), worin

$$u_x^{(k)} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial v_{x+n-1}^{(k)}}, \quad D = \left| v_{x+i-1}^{(k)} \right| \quad (k, i = 1, 2, \ldots, n),$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A).[1] Zwischen den Funktionen $u_x^{(k)}$ und $v_x^{(k)}$ bestehen zunächst[1] die Beziehungen:

$$u_x^{(1)} v_{x+r}^{(1)} + u_x^{(2)} v_{x+r}^{(2)} + \cdots + u_x^{(n)} v_{x+r}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } r < n-1, \\ 1, & \text{wenn } r = n-1; \end{cases}$$

da sich aber $v_{x+n+\nu}^{(k)}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) mittels der Gleichung (A′) linear durch $v_x^{(k)}, v_{x+1}^{(k)}, \ldots, v_{x+n-1}^{(k)}$ ausdrücken läßt mit Koeffizienten, die rationale Funktionen der $p_x^{(i)}$ und ihrer sukzessiven Werte sind, so ist allgemein

$$\lambda_x^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} u_x^{(i)} v_{x+r}^{(i)} \tag{1}$$

eine rationale Funktion der $p_x^{(i)}$ und ihrer sukzessiven Werte:

---

1) *2. Kap.*, I, C; *3. Kap.*, IV.

$$(2)\qquad \lambda_x^{(\nu)} = \lambda_\nu\left(p_x^{(0)}, p_x^{(1)}, \ldots, p_x^{(n-1)}; p_{x+1}^{(0)}, p_{x+1}^{(1)}, \ldots; \ldots\right),$$

z. B.

$$\lambda_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} u_x^{(k)} v_{x+n}^{(k)} = -\frac{p_{x+n-1}^{(1)}}{p_{x+n}^{(0)}},$$

$$\lambda_x^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} u_x^{(k)} v_{x+n+1}^{(k)} = -\frac{p_{x+n-1}^{(2)}}{p_{x+n+1}^{(0)}} + \frac{p_{x+n-1}^{(1)}}{p_{x+n}^{(0)}} \frac{p_{x+n}^{(1)}}{p_{x+n+1}^{(0)}}, \text{ usf.}^{1)}$$

Da die $\lambda_x^{(\nu)}$ nur von den Koeffizienten der Differenzengleichung (A) abhängen, so ist die Wahl des Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A) und ihrer Adjungierten, mit denen man sich die Ausdrücke (1) gebildet denkt, ganz gleichgültig, und lediglich die rationalen Ausdrücke (2) sind es, die man wirklich herzustellen hat.

Aus (1) ergibt sich nun:

$$\frac{\lambda_x^{(\nu)}}{\lambda_{x+1}^{(\nu-1)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_x^{(k)} v_{x+\nu}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n} u_{x+1}^{(k)} v_{x+\nu}^{(k)}},$$

oder

$$(3)\qquad \frac{\lambda_x^{(\nu)}}{\lambda_{x+1}^{(\nu-1)}} = \frac{u_x^{(1)} + u_x^{(2)} \dfrac{v_{x+\nu}^{(2)}}{v_{x+\nu}^{(1)}} + \cdots + u_x^{(n)} \dfrac{v_{x+\nu}^{(n)}}{v_{x+\nu}^{(1)}}}{u_{x+1}^{(1)} + u_{x+1}^{(2)} \dfrac{v_{x+\nu}^{(2)}}{v_{x+\nu}^{(1)}} + \cdots + u_{x+1}^{(n)} \dfrac{v_{x+\nu}^{(n)}}{v_{x+\nu}^{(1)}}}.$$

Nach den über die $v_x^{(k)}$ gemachten Voraussetzungen ist aber

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{v_{x+\nu+1}^{(k)}}{v_{x+\nu}^{(k)}} : \frac{v_{x+\nu+1}^{(1)}}{v_{x+\nu}^{(1)}} = \frac{\varrho_k}{\varrho_1} < 1, \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

und folglich

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{v_{x+\nu}^{(k)}}{v_{x+\nu}^{(1)}} = 0. \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

1) Der tiefere Grund dafür, daß die Größen $\lambda_x^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} u_x^{(k)} v_{x+\nu}^{(k)}$ sich durch die Koeffizienten der Differenzengleichung (A) und deren sukzessive Werte rational ausdrücken lassen, liegt darin, daß die Funktionen $u_x^{(k)}$ und $v_x^{(k)}$ kontragrediente Systeme bilden (vgl. z B. *Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 64—66) und daher $\lambda_x^{(\nu)}$ bei entsprechenden (reziproken) linearen Substitutionen der $u_x^{(k)}$ und $v_x^{(k)}$ invariant bleibt, sodaß das Analogon des *Appell*schen Satzes (siehe *4. Kap.*, I) in Kraft tritt. — Für die rekursorische Berechnung der $\lambda_x^{(\nu)}$ vgl. *Pincherle*, 6., 3. Teil.

Geht man daher in der Gleichung (3) zur Grenze für $\nu = \infty$ über, so erhält man

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lambda_x^{(\nu)}}{\lambda_{x+1}^{(\nu-1)}} = \frac{u_x^{(1)}}{u_{x+1}^{(1)}};$$

betrachtet man also die Gleichung (3) für genügend große Werte von ν, so ergibt der Quotient $\lambda_{x+1}^{(\nu-1)} : \lambda_x^{(\nu)}$, welcher nach (2) eine rationale Funktion der Koeffizienten von (A) und ihrer sukzessiven Werte ist, einen angenäherten Ausdruck für $u_{x+1}^{(1)} : u_x^{(1)}$, d. h. das Partikularintegral $y_x^{(1)} = u_{x+1}^{(1)}$ der vorgelegten Differenzengleichung (A) ergibt sich auf approximativem Wege „durch Quadratur", d. h. als Lösung einer homogenen linearen Differenzengleichung *erster Ordnung.*[1]) Sind die $p_x^{(i)}$ insbesondere *rationale* Funktionen von x, so ist auch $\lambda_{x+1}^{(\nu-1)} : \lambda_x^{(\nu)}$ eine rationale Funktion von x $\left(= a \frac{\prod (x - a_i)}{\prod (x - b_i)}\right)$, sodaß $u_x^{(1)}$ sich approximativ durch einen Ausdruck von der Form

$$a^x \frac{\prod \Gamma(x - a_i)}{\prod \Gamma(x - b_i)}$$

darstellen läßt.[2])

Die hier gegebene Lösungsmethode für homogene lineare Differenzengleichungen ist analog der *Bernoulli-Lagrange*schen approximativen Auflösung einer algebraischen Gleichung mittels der Quotienten zweier aufeinanderfolgender Summen von Wurzelpotenzen.

B. Lösung homogener linearer Differenzengleichungen zweiter Ordnung durch Kettenbrüche.[3])

Ähnlich wie man die Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch Kettenbrüche dargestellt hat, kann man auch für die Lösung u_x einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung den Quotienten $\frac{u_{x+1}}{u_x}$ in einen Kettenbruch entwickeln: Dividiert man nämlich beide Seiten der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$a_x u_{x+2} + b_x u_{x+1} - u_x = 0$$

---

1) Man sieht leicht, daß dieses Partikularintegral die (bis auf eine „Konstante" bestimmte) „ausgezeichnete Lösung" von (A) ist (vgl. S. 208).

2) Vgl. *1. Kap.*, II, C.

3) *Nörlund,* **1.** u. **3.**; *W.*

durch u_{x+1}, so erhält man:

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} = b_x + \frac{a_x}{\frac{u_{x+1}}{u_{x+2}}},$$

also:

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \cfrac{1}{b_x + \cfrac{a_x}{b_{x+1} + \cfrac{a_{x+1}}{b_{x+2} + \cfrac{a_{x+2}}{b_{x+3} + \cdots}}}}.$$

Auf ähnliche Weise hat bereits *Gauß*[1]) für die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, die ja, wie er in derselben Abhandlung[2]) zeigt, als Funktion der Parameter α, β, γ aufgefaßt, linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung genügt, die Quotienten zweier „benachbarter" Funktionen

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}, \quad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}, \quad \frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

$$\frac{F(\alpha-1, \beta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}, \quad \frac{F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

durch Kettenbrüche dargestellt. Es fehlt aber bei dieser direkten Methode der allgemeine Konvergenzbeweis; speziell für die *Gauß*schen Reihen haben *Riemann*[3]), *Schlömilch*[4]) u. a. die Konvergenz der unendlichen Kettenbrüche bewiesen.

Die im folgenden dargelegte Enwickelungsmethode hat den Vorzug, daß sie, von einer *Identität* ausgehend, gestattet, unter hinreichend allgemeinen Bedingungen den Beweis für die Konvergenz der hier auftretenden Kettenbrüche in verhältnismäßig einfacher Weise zu erbringen. Setzt man

$$z_k = \frac{x_k - x_{k+1}}{x_k - x_{k+2}} \cdot \frac{x_{k+2} - x_{k+3}}{x_{k+1} - x_{k+3}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-3),$$

$$v_k = \frac{x_n - x_k}{x_n - x_{k-1}} \cdot \frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_k - x_{k+2}},$$

so ist

$$v_k = 1 - \frac{z_k}{v_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-3), \quad v_{n-2} = 1,$$

1) *Gauß*, **1.**, 2. Abschnitt. Nr. 12—14.
2) l. c., 1. Abschnitt, Nr. 7—11; vgl. *10. Kap.*, II.
3) Werke, XXIII, S. 424 ff. (2 Aufl. 1892). 4) Algebraische Analysis, § 70.

und daher *identisch*:

(4)
$$v_1 = 1 - \cfrac{z_1}{1 - \cfrac{z_2}{1 - \cfrac{z_3}{1 - \cdots \cfrac{z_{n-4}}{1 - z_{n-3}}}}} \quad {}^{1)}$$

Es sei nun die Differenzengleichung zweiter Ordnung

(5)
$$y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0$$

gegeben, worin p_x und q_x rationale Funktionen von gleichem Zähler- und Nennergrade sind, sodaß

$$\lim_{x=\pm\infty} p_x = a_1, \quad \lim_{x=\pm\infty} q_x = a_2 \quad (a_1 \text{ u. } a_2 \text{ endliche Größen})$$

ist, und es möge die „charakteristische" Gleichung

(6)
$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

Wurzeln von ungleichem absoluten Betrage besitzen: $|\alpha| > |\beta|$. Sind $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ zwei Fundamentallösungen der Gleichung (5), so ist[2]:

$$p_x = \frac{y_{x+2}^{(1)} y_x^{(2)} - y_{x+2}^{(2)} y_x^{(1)}}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}},$$

$$q_x = \frac{y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+2}^{(1)}}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}}.$$

Setzt man nun

$$x_k = \frac{y_{x+k-2}^{(1)}}{y_{x+k-2}^{(2)}},$$

so wird

$$z_k = \frac{q_{x+k-1}}{p_{x+k-2}\, p_{x+k-1}};$$

daher ergibt sich, wenn noch $n+2$ an Stelle von n gesetzt wird,

$$v_1 - 1 = \frac{y_{x+n}^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_{x+n}^{(2)} y_{x+1}^{(1)}}{y_{x+n}^{(1)} y_x^{(2)} - y_{x+n}^{(2)} y_x^{(1)}} \cdot \frac{1}{p_{x-1}},$$

---

1) *Thiele*, Den endelige Kjaedebrökfunktions Teori, Tidskr. for Math. (2) **6** (1870).

2) *2. Kap.*, III.

und folglich aus (4):

$$(7)\quad K_x^{(1)} \equiv \frac{y_{x+1}^{(1)} y_{x+n}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+n}^{(1)}}{y_x^{(1)} y_{x+n}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+n}^{(1)}} = -\cfrac{q_x}{p_x - \cfrac{q_{x+1}}{p_{x+1} - \cfrac{q_{x+2}}{p_{x+2} - \cdots - \cfrac{q_{x+n-2}}{p_{x+n-2}}}}}.$$

Die rechte Seite dieser Identität enthält nur die Koeffizienten der Gleichung (5) und deren sukzessive Werte, ist also von der Wahl der Fundamentallösungen $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ ganz unabhängig. Wir denken uns nun $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ so gewählt, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_{x+n+1}^{(1)}}{y_{x+n}^{(1)}} = \alpha, \quad \lim_{n=\infty} \frac{y_{x+n+1}^{(2)}}{y_{x+n}^{(2)}} = \beta \text{ [1]}$$

wird, was nach Nr. I, A dieses Kap. stets möglich ist; dann ist

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{y_{x+n+1}^{(2)}}{y_{x+n}^{(2)}} : \frac{y_{x+n+1}^{(1)}}{y_{x+n}^{(1)}} \right| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1,$$

und daher

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_{x+n}^{(2)}}{y_{x+n}^{(1)}} = 0.$$

Folglich wird für $n = \infty$ der unendliche Kettenbruch

$$K_x^{(1)} = \frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(2)}}.$$

Ganz analog findet man, wenn wieder $y_x^{(3)}$ und $y_x^{(4)}$ zwei Fundamentallösungen der Gleichung (5) sind, die Identität:

$$(8)\quad K_x^{(2)} \equiv \frac{y_x^{(3)} y_{x-n}^{(4)} - y_x^{(4)} y_{x-n}^{(3)}}{y_{x+1}^{(3)} y_{x-n}^{(4)} - y_{x+1}^{(4)} y_{x-n}^{(3)}} = -\cfrac{1}{p_{x-1} - \cfrac{q_{x-1}}{p_{x-2} - \cfrac{q_{x-2}}{p_{x-3} - \cdots - \cfrac{q_{x-n+1}}{p_{x-n}}}}}.$$

Nun kann man nach Nr. I, D dieses Kap. die Lösungen $y_x^{(3)}$ und $y_x^{(4)}$ so wählen, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_{x-n-1}^{(3)}}{y_{x-n}^{(3)}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{y_{x-n-1}^{(4)}}{y_{x-n}^{(4)}} = \frac{1}{\beta}$$

1) $y_x^{(2)}$, die sogenannte „ausgezeichnete Lösung", ist bis auf eine „Konstante" bestimmt (vgl. den Schluß von I, A dieses Kapitels).

wird; dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_{x,\,n+1}^{(3)}}{y_{x,\,n}^{(3)}} : \frac{y_{x,\,n+1}^{(1)}}{y_{x,\,n}^{(1)}} = \frac{\beta}{\alpha} < 1,$$

und folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_{x,\,n}^{(3)}}{y_{x,\,n}^{(1)}} = 0.$$

Daher wird für $n = \infty$ der unendliche Kettenbruch

$$K_x^{(2)} = \frac{y_x^{(3)}}{y_{x+1}^{(3)}}.$$

Für $x = \infty$ wird $p_x = p_{x+1} = p_{x+2} = \cdots = a_1$, $q_x = q_{x+1} = q_{x+2} = \cdots = a_2$, $\lim K_x^{(1)} = \beta$ und folglich $\lim K_x^{(2)} = \frac{1}{\alpha}$; denn Gleichung (7) liefert für $x = \infty$ die bekannte Kettenbruchentwicklung der kleineren Wurzel der quadratischen Gleichung (6) und infolgedessen Gleichung (8) mit beliebiger Annäherung die Kettenbruchentwicklung des reziproken Wertes ihrer größeren Wurzel. Daraus ergibt sich gleichzeitig, daß $K_x^{(1)}$ und $1 : K_x^{(2)}$, d. h. $\frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(2)}}$ und $\frac{y_{x+1}^{(3)}}{y_x^{(3)}}$ nicht identisch gleich sind, sodaß $y_x^{(2)}$ und $y_x^{(3)}$ sich nicht durch eine bloße „Konstante" unterscheiden. Die beiden für alle (reellen) x konvergenten Kettenbrüche $K_x^{(1)}$ und $K_x^{(2)}$ ($n = \infty$) ergeben also mittels „Quadratur" die beiden Fundamentallösungen $y_x^{(2)}$ und $y_x^{(3)}$ der Differenzengleichung (5). Über die Verallgemeinerung dieses Resultates vgl. *Nörlund*, **1.** und **3.**

Auf Grund der *Poincaré*schen Untersuchungen (Nr. I, A und C) hat *Horn*[1]) für die Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung, deren Koeffizienten für $x = \infty$ endliche Grenzwerte besitzen, und allgemeiner einer Differenzengleichung

$$y_{x+n} + x^k p_x^{(1)} y_{x+n-1} + x^{2k} p_x^{(2)} y_{x+n-2} + \cdots + x^{nk} p_x^{(n)} y_x = 0,$$

worin

$$p_x^{(\lambda)} = a_0^{(\lambda)} + \frac{a_1^{(\lambda)}}{x} + \frac{a_2^{(\lambda)}}{x^2} + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergente oder asymptotische[2]) Reihen sind, ... falls die Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung verschiedene absolute Werte haben

1) *Horn*, **1.**

2) Über diesen Begriff vgl. *10. Kap.*, I, B, 2., Schluß, und III, Schluß.

und bei Beschränkung auf positive ganzzahlige x — asymptotische, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Potenzreihen aufgestellt. Wir werden indessen — für den Fall, daß die Koeffizienten rationale Funktionen (vgl. die Anmerkung zu I, A dieses Kap.) oder konvergente Fakultätenreihen sind — die *Fakultätenreihen* vorziehen, welche dem Wesen der Differenzengleichungen angemessener zu sein scheinen, indem ihre Koeffizienten sich leichter berechnen lassen, welche ferner die Beschränkung der Variabilität von x unnötig machen und endlich unter Umständen wirklich konvergieren (vgl. *10. Kap.*, III und IV); durch diese Entwickelungen wird gleichzeitig der *Poincaré*sche Satz in dem Falle rationaler Koeffizienten eine strengere Begründung und Präzisierung (vgl. den ersten *Perron*schen Satz in Nr. I, A) erfahren.

Zehntes Kapitel.

Integration der linearen Differenzengleichungen durch Reihen.[1]

Einleitung: Die Potenzreihe, das sonst so allmächtige Instrument der Analysis, versagt im allgemeinen bei der Integration der linearen Differenzengleichungen, und zwar aus leicht ersichtlichen Gründen: Wenn eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ auch z. B. in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ konvergiert, so braucht $\mathfrak{P}(x + r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *nicht* zu konvergieren, sodaß ein direktes Einsetzen derselben in die Differenzengleichung im allgemeinen unmöglich wird. Aber selbst, wenn man weiß, daß $\mathfrak{P}(x)$ eine ganze transzendente Funktion darstellt, also in der ganzen Ebene konvergiert, wie z. B. die Funktion $Q(x)$ (vgl. *1. Kap.*, II, C), so erhält man durch direktes Einsetzen der Reihe in die Differenzengleichung für die Koeffizienten unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten; und wenn diese auch durch die Untersuchungen von *Hill*, *Poincaré*, *H. v. Koch*, *Cazzaniga* u. a. über unendliche Determinanten der Behandlung zugänglich gemacht worden sind, so sind doch die Resultate entweder nicht einfach genug oder überhaupt unbrauchbar, indem die Determinanten im allgemeinen nicht konvergieren. Dagegen können *indirekt*, d. h. aus anderen Darstellungen der Lösungen, z. B. aus Integraldarstellungen und den später zu behandelnden Partialbruch- und Fakultätenreihen, nachträglich brauchbare Potenzreihen hergeleitet werden.

Wollte man z. B. für die Funktion $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$[2], von der man weiß, daß sie eine ganze transzendente Funktion ist und der Differenzengleichung

$$y_{x+1} - x y_x = e^{-1} \tag{1}$$

genügt, direkt eine Potenzreihe aufstellen, so könnte man die Gleichung (1) zunächst durch die Substitution $y_x = e^{-1} u_x$ in

$$u_{x+1} - x u_x = 1 \tag{2}$$

1) In diesem Abschnitt werden für die unabhängige Variable x auch komplexe Werte zugelassen.

2) *1. Kap.*, II, C.

$$u_x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

an, so ergibt sich

$$u_{x+1} - x u_x = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad a_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} c_k - c_{r-1} \quad \left(\binom{0}{0} = 1,\ c_{-1} = 0\right),$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots)$$

also das Gleichungssystem

$$a_0 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 1, \quad a_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Nimmt man von den a_r zunächst nur die ersten $n+1$ Glieder und schreibt die ersten $n+1$ Gleichungen hin, so erhält man für $k \leqq n$:

$$c_k = \frac{D_n^{(k+1)}}{D_n},$$

worin

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & -1 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$

ist und $D_n^{(k+1)}$ aus D_n dadurch hervorgeht, daß in D_n an Stelle der $(k+1)^{\text{ten}}$ Kolonne die Kolonne $1, 0, 0, 0, \ldots, 0$ gesetzt wird (insbesondere wird $c_n = \frac{(-1)^n(-1)^n}{D_n} = \frac{1}{D_n}$); man würde also die c_k in der unpraktikablen Form

$$c_k = \lim_{n=\infty} \frac{D_n^{(k+1)}}{D_n}$$

erhalten. Benutzt man dagegen z. B. die Integraldarstellung

$$Q(x) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt, \text{ [1]}$$

---

1) Vgl. 8. Kap., II, A, Beispiel.

so ergibt die *Taylor*sche Entwickelung:

$$e^{-1} c_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k Q(x)}{d x^k}\right]_{x=0} = \frac{1}{k!}\int_1^\infty e^{-t} (\log t)^k \frac{dt}{t}.$$

Andere Beispiele für die Umwandlung der Lösungen linearer Differenzengleichungen in Potenzreihen werden an geeigneten Stellen folgen.

An Stelle der Potenzreihen treten bei der Darstellung der Lösungen linearer Differenzengleichungen andere Entwickelungen: insbesondere sind es die bereits von *Stirling*[1]), später von *Binet*[2]), *Schlömilch*[3]) u. a., in neuerer Zeit von *Jensen*[4]), *Pincherle*[5]), *Nielsen*[6]) und *Landau*[7]) behandelten *Fakultätenreihen* von der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{(k)}}, \quad (x^{(k)} = x(x+1)\cdots(x+k-1), \; x^{(0)} = 1),$$

die hier die wichtigste Rolle spielen, was unter anderem schon daraus erhellt, daß in vielen Fällen, wo die (nach fallenden Potenzen von x fortschreitende) Potenzreihe asymptotisch *divergiert*, die entsprechende Fakultätenreihe *konvergiert*. Die Fakultätenreihen sind hauptsächlich dadurch ausgezeichnet, daß sie, wenn sie für $x = x_0$ konvergent sind, auch für jedes $x = x_1$ konvergieren, für welches $\Re(x_1) > \Re(x_0)$[8]) ist, sodaß ihr Konvergenzgebiet eine Halbebene ist, die links durch eine Gerade $\Re(x) = \lambda$ begrenzt wird[9]) (mit Ausschluß der Punkte $0, -1, -2, \ldots$). Eine Fakultätenreihe ist in einer gewissen Umgebung jeder (von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedenen) Stelle im Innern ihrer Konvergenzhalbebene *gleichmäßig* konvergent[10]): sie stellt daher nach einem Satze von *Weierstraß*[11]) in ihrer Konvergenzhalbebene eine mit eventueller Ausnahme der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ (die dann einfache Pole sind) reguläre analytische Funktion dar und darf dort beliebig oft gliedweise differentiiert werden.[12])

Die Fakultätenreihen sind aufs engste verwandt mit den Integralen von der Form

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

1) *Stirling*, **1.** 2) *Binet*, **1.** 3) *Schlömilch*, **1.**
4) *Jensen*, **1.**, **2.**, **3.** 5) *Pincherle*, **10.**, **11.**, **12.**
6) *Nielsen*, **1.**, **2.**, **3.** 7) *Landau*, **2.**
8) $\Re(x)$ bedeutet „reeller Teil von x".
9) Den einfachsten Beweis dieses Satzes siehe bei *Landau*, **2.**, Satz I, S. 157 ff.
10) *Landau*, **2.**, Satz II, S. 161.
11) Zur Funktionenlehre, Berlin. Ber. 1880, 723—726.
12) *Landau*, **2.**, Satz III, S. 164.

die besonders von *Pincherle*[1]) ausführlich behandelt worden sind; beide Ausdrücke können unter gewissen Bedingungen in einander übergeführt werden.[2]) — Die Darstellung einer Funktion durch eine Fakultätenreihe ist *eindeutig;* d. h. wenn zwei Fakultätenreihen einander gleich sind, so müssen die Koeffizienten der einzelnen Fakultäten einander gleich sein, oder noch anders ausgedrückt: die Fakultätenreihen gestatten keine Nullentwickelung.[3])

Außer den Fakultätenreihen kommen für die Darstellung der Lösungen linearer Differenzengleichungen zunächst noch in Betracht die Partialbruchreihen von der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x+k}$: auch hier ist die Darstellung eine eindeutige. Für die Umwandlung dieser beiden Reihenarten in einander gelten die elementaren Formeln:

$$(3)\qquad \frac{1}{x^{(k+1)}} = \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{1}{x+r},$$

und umgekehrt:

$$(4)\qquad \frac{1}{x+k} = k!\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^r}{(k-r)!}\,\frac{1}{x^{(r+1)}}.$$

Ferner sind zur Darstellung der Lösungen geeignet die Binomialreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\binom{x-1}{n}$, welche ebenso wie die Fakultätenreihen eine Konvergenzhalbebene besitzen[4]); jedoch gestatten diese Reihen eine Nullentwickelung, wie das einfache Beispiel

$$0 = (1-1)^{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{x-1}{n}, \quad (\Re(x) > 1)$$

zeigt.[5]) — Aus dem Integral $\Omega(x)$ erhält man eine Binomialreihe mittels der Formel $[1-(1-t)]^{x-1} = \sum\limits_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{x-1}{s}(1-t)^s$.[6])

Endlich sind noch die hypergeometrischen Reihen von Wichtigkeit, welche Potenzreihen, Fakultätenreihen und Binomialreihen in sich enthalten, insbesondere die schon *Euler* bekannte, von *Gauß*,

---

1) *Pincherle*, **13.**; vgl. *Landau*, **2.**, § 7, und *Nielsen*, **3.**, S. 115 ff.
2) *Nielsen*, **3.**, S. 239 ff.
3) *Nielsen*, **3.**, S. 238.
4) *Landau*, **2.**, § 5.
5) Vgl. *Nielsen*, **3.**, S. 127.
6) *Nielsen*, **3.**, § 49 und § 96, Satz IX.

Kummer und *Riemann* nach allen Richtungen durchforschte *Gauß*sche Reihe[1])

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots,$$

in welcher x gewöhnlich die Rolle eines Parameters spielen wird. Ihr Zusammenhang mit der Gammafunktion wird durch die von *Gauß* gefundene Formel[2])

$$(5)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \equiv f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \quad (\Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0)$$

vermittelt, welche sich am einfachsten aus der *Euler*schen Integraldarstellung[3])

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\, dt$$

für $x = 1$ ergibt[4]), wenn die Formel für das sogenannte „erste *Euler*sche Integral“[5])

$$(6)\qquad B(p, q) \equiv \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\Re(p) > 0,\ \Re(q) > 0)$$

zu Hilfe genommen wird. Von den übrigen zahlreichen Eigenschaften der *Gauß*schen Reihe werden diejenigen, welche wir für unsere Zwecke gebrauchen, an der betreffenden Stelle angegeben werden.

I. Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung.

In diesem Abschnitt sollen hauptsächlich solche linearen Differenzengleichungen erster Ordnung behandelt werden, die mit der Theorie der Gammafunktion in Zusammenhang stehen, insbesondere auch *nicht* homogene Gleichungen. Während aber von den meisten in der Theorie der Gammafunktion auftretenden Funktionen, z. B. den Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$, naturgemäß erst nachträglich gezeigt zu werden pflegt, daß dieselben lineare Differenzengleichungen befriedigen[6]),

1) *Gauß*, **1.**

2) *Gauß*, **1.**, Nr. 24; für komplexe α, β, γ *Weierstraß*, **1.**

3) *Euler*, **2**ᵇ., Bd. **2** (1769), (1827), 230 ff.; *Kummer*, **1.**, S. 138 ff., **2.**, S. 214; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 65.

4) Auf diesem Wege hat *Kummer* (**1.**, S. 138 ff.) die *Gauß*sche Formel $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ hergeleitet.

5) *Euler*, **2**ᵇ., Bd. **1**, 213—247; Bd. **4**, 78—354. *Legendre*, **1.** Einen ganz kurzen Beweis für die Formel (6) gaben *Jacobi* (Jour. für Math. **11**, 307) und *Dirichlet* (Werke, Bd. **1**, 398); vgl. *Nielsen*, **3**, § 60.

6) Siehe z. B. die Arbeiten von *Mellin*, **1.**, **2.**, **3.**; *Nielsen*, **3.**, § 9.

wir hier, soweit es irgend möglich ist, umgekehrt die Reihen-
kelungen für diese Funktionen direkt aus den Differenzen-
ngen herleiten, denen sie genügen. Soweit dies nicht möglich
rden wir für die Ableitung der Resultate in der Regel auf die
verweisen, um den Umfang dieses Abschnittes nicht gar zu
iszudehnen; denn die Mannigfaltigkeit der Entwickelungen ist,
r sehen werden, überraschend groß.

A. Homogene Gleichungen.

Gleichungen mit linearen Koeffizienten:

$$(ax+b)y_{x+1} + (cx+d)y_x = 0\,[1];$$

en können durch eine einfache Transformation (vgl. **2.**) auf
rm

$$y_{x+1} = \frac{x-\alpha}{x}\,y_x$$

it werden. Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$y_x = \omega_x \frac{\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x)} \quad (\omega_{x+1} = \omega_x);$$

st auch

$$y_x = \frac{\Gamma(1)\,\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-\alpha)}$$

artikularlösung. Setzt man nun in Formel (5) der Einleitung
Kap. $\gamma = 1$, $\gamma - \beta = 1 - \beta = x$, so wird:

$$y_x = F(\alpha, 1-x, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{(k)}}{k!} \binom{x-1}{k},$$

$(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$, $\alpha^{(0)} = 1$ und $\binom{x-1}{k} = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{1\cdot 2\cdots k}$

Wir haben also für eine Partikularlösung unserer Differenzen-
ng eine Binomialreihe gewonnen; dieselbe konvergiert für
$x) > 0$.

Gleichungen mit quadratischen Koeffizienten[2]:

$$(x^2 + a_1 x + a_2)y_{x+1} = c(x^2 + b_1 x + b_2)y_x.$$

eine Substitution $x = x' + \delta$ kann b_2 zum Verschwinden ge-
werden; dann lautet die Gleichung, wenn wieder x statt x'
eben wird:

$$(x-\alpha)(x-\beta)y_{x+1} = cx(x+d)y_x;$$

eht durch die Transformation $y_x = c^x u_x$ über in

$$(x-\alpha)(x-\beta)u_{x+1} = x(x+d)u_x.$$

W. 2) W.

Wir betrachten nun den Fall $a_1 = b_1$; d. h. $d = -(\alpha + \beta)$; dann lautet die allgemeine Lösung:

$$u_x = \omega_x \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x-\alpha-\beta)}{\Gamma(x-\alpha)\,\Gamma(x-\beta)}\,{}^{1)} = \omega_x f(\alpha, \beta, x)\,{}^{2)} \quad (\Re(x-\alpha-\beta) > 0);$$

darin ist

$$f(\alpha, \beta, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}\,\beta^{(k)}}{k!\,x^{(k)}}$$

eine Fakultätenreihe in x, konvergent für $\Re(x-\alpha-\beta) > 0$.

Für $\beta = 1$, $x = z + 1$ ergibt sich

$$f(\alpha, 1, z+1) = \frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(z)\,\Gamma(z-\alpha+1)} = \frac{z}{z-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}}{(z+1)^{(k)}},$$

also

$$\frac{1}{z-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}}{z^{(k+1)}} \quad (\Re(z-\alpha) > 0);$$

das ist die *Stirling*sche Fakultätenreihe für $\frac{1}{z-\alpha}$ [3]. Durch $(p-1)$-malige Differentiation nach α erhält man noch für $\alpha = 0$ die ebenfalls *Stirling* (**1.**, S. 11) angehörige Entwickelung:

$$\frac{1}{z^p} = \sum_{s=p}^{\infty} \frac{C_s^{s-p}}{z^{(s)}} \quad (\Re(z) > 0)\,{}^{4)},$$

oder für $z = x - \alpha$:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^p} = \sum_{s=p}^{\infty} \frac{C_s^{s-p}}{(x-\alpha)^{(s)}} \quad (\Re(x-\alpha) > 0).$$

Darin bedeuten die C_s^r die sogenannten „Fakultätenkoeffizienten vom Range s“ oder „*Stirling*schen Zahlen erster Art“; sie sind für $r > 0$ die Summen der $\binom{s-1}{r}$ möglichen Produkte mit r verschiedenen Faktoren, welche man aus den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, s-1$ wählen kann, während stets $C_s^0 = 1$ ist (vgl. *Nielsen*, **3.**, § 26).

In ähnlicher Weise lassen sich die allgemeinen Differenzengleichungen erster Ordnung

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)\,y_{x+1} = a\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\,y_x,$$

---

1) Vgl. *1. Kap.*, II, C. 2) Formel (5) dieses Kapitels.

3) *Stirling*, **1.**, S. 12, 45; vgl. *Nielsen*, **3.**, S. 77.

4) Für den Konvergenzbeweis vgl. *Schlömilch*, Ztschr. für Math. u. Phys. **4** (1859), 396; *Nielsen*, **3.**, S. 78 u. 247

deren allgemeine Lösung nach dem *1. Kap.*, II, C die Form

$$y_x = a^x \frac{\Gamma(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\cdots\Gamma(x-\alpha_n)}{\Gamma(x-\beta_1)\,\Gamma(x-\beta_2)\cdots\Gamma(x-\beta_n)}$$

besitzt, unter gewissen Bedingungen für die Größen α_k und β_k durch hypergeometrische Reihen höherer Ordnung integrieren[1]); doch gehen wir nicht näher darauf ein, da noch keine präzisen Untersuchungsresultate vorliegen.

B. Vollständige Gleichungen.

1. $$y_{x+1} - y_x = \frac{1}{x}$$

(formale Lösung: $y_x = \sum \frac{1}{x} + \omega_x$; $-\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{x+s}$ ist divergent).

Eine Partikularlösung ist (*1. Kap.*, II, C):

$$\Psi(x) \equiv \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right)\,{}^{2)},$$

worin

$$C = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0{,}5772156649\ldots$$

die *Euler*sche Konstante bedeutet; diese Partialbruchreihe für $\Psi(x)$ konvergiert für jeden endlichen Wert von x mit Ausnahme der Punkte $x = 0, -1, -2, \ldots$, welche einfache Pole mit dem Residuum -1 sind. — Die n^{te} Ableitung von $\Psi(x)$, $\Psi^{(n)}(x)$, genügt der Differenzengleichung

1a. $$y_{x+1} - y_x = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},$$

und es ist:

$$\Psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\, n! \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(x+s)^{n+1}};$$

daher ergibt die *Taylor*sche Entwickelung die Potenzreihe:

$$\Psi(1+x) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r s_r x^{r-1} \quad (|x| < 1),$$

1) Einen Ansatz dazu findet man z. B. bei *Pincherle*, **1a**.

2) Die Funktion $\Psi(x)$ ist zuerst von *Gauß* (**1.**, Nr. 30—37) eingehend untersucht worden; übrigens setzt *Gauß* $\frac{d \log \Pi(x)}{dx} = \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = \Psi(x)$. Vgl. *Nielsen*, §§ 1—5 u. 14, insbesondere auch die Literaturangaben.

worin

$$s_1 = C = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right]$$

und

$$s_r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \quad (r = 2, 3, 4, \ldots)$$

ist. — Wir erwähnen ferner die Binomialreihe von *Stern*[1]):

$$\Psi(x) = -C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{x-1}{k+1} \quad (\Re(x) > 0).$$

Aus der Potenzreihe für $\Psi(1+x)$ ergibt sich durch Integration, da $\log \Gamma(1) = \log 1 = 0$ ist,

$$\log \Gamma(1+x) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{s_r}{r} x^r \quad (|x| < 1)$$

als Lösung der Differenzengleichung

$$\textbf{2.} \qquad y_{x+1} - y_x = \log(1+x).$$

Auch hier existiert eine Binomialreihe, die von *Hermite*[2]) herrührt:

$$\log \Gamma(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{x}{k} \Delta^{k-1} \log 1 = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \log 2$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\log 3 - 2 \log 2) + \cdots;$$

dieselbe konvergiert für $\Re(x) > 0$.

Mit Benutzung der Formel

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \operatorname{ctg} \pi x \text{ [3])},$$

sowie der Differenzengleichung **1.**, der $\Psi(x)$ genügt, kann man die Potenzreihe für $\Psi(1+x)$ in die konvergentere

$$\Psi(1+x) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi x - \sum_{r=0}^{\infty} s_{2r+1} x^{2r}$$

---

1) „Zur Theorie der *Euler*schen Integrale", Göttinger Studien 1847, S. 39.

2) Annali di Mat. (3) **5**, 57—72 (1900); diese Reihe als Partikularlösung der Gleichung **2.** ergibt sich leicht, wenn man für $\log(1+x)$ die *Newton*sche Interpolationsformel mit dem *Cauchy*schen Restglied (s. z. B. *Selivanoff*, **2.**, S. 21) ansetzt und beachtet, daß $y_x = \sum \log(1+x)$ ist (*W.*).

3) Siehe die *Euler*sche Formel, *1. Kap.*, II, C

umformen[1]), und mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

ist, in die noch rascher konvergierende Reihe

$$\Psi(1+x) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi x - \frac{1}{1-x^2} + \sum_{r=0}^{\infty}(1 - s_{2r+1})\,x^{2r}.$$

Daraus ergibt sich wieder durch Integration die Reihe:

$$\log\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\left[\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \log\frac{1+x}{1-x}\right] + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1-s_{2r+1}}{2r+1}\,x^{2r+1}\ {}^{2)},$$

welche für $|x| < 2$ konvergiert.

Aus der Integraldarstellung[3]):

$$\log\Gamma(x) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-tx} - e^{-t}}{1-e^{-t}} + (x-1)\,e^{-t}\right)\frac{dt}{t} \quad (\Re(x) > 0),$$

welche auch die vorher erwähnte *Hermite*sche Binomialreihe liefert, ergibt sich die merkwürdige *Kummer*sche Reihe[4]):

$$\log\Gamma(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(C + \log 2) + (1-x)\log\pi - \frac{1}{2}\log\sin\pi x$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\sin 2n\pi x,$$

welche für $0 < x < 1$ gilt, während die Integraldarstellung von *Binet*[5]):

$$\mu(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi}$$
$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt = \int_0^{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1-t} - \frac{1}{\log t}\right)\frac{t^{x-1}\,dt}{\log t}$$

zu der Darstellung durch eine Fakultätenreihe

$$\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k(x+1)^{(k)}} \qquad \left((x+1)^{(k)} = (x+1)(x+2)\cdots(x+k)\right)$$

1) Für das Folgende vgl. *Nielsen*, § 14. 2) *Legendre*, **1.**, S. 505.

3) *Plana*, Mém. de Turin, **24** (1820); *Binet*, **1.**, S. 261; *Malmstén*, Journ. für Math. **35**, 74 (1847); vgl. *Nielsen*, **3.**, § 73.

4) *Kummer*, **3.**; *Schlömilch*, **1.**, 255—256; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 77.

5) *Binet*, **1.**, S. 240.

führt, worin

$$c_k = \int_0^1 u(u+1)(u+2)\cdots(u+k-1)(2u-1)\,du,$$

z. B.

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{59}{60}, \quad c_4 = \frac{227}{60} \text{ usf.}$$

ist[1]). Diese Reihe *konvergiert* für $\Re(x) > 0$ und ist daher der bekannten *Stirling*schen Potenzreihe

$$\mu(x) \sim \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)} \frac{1}{x^{2s+1}} \left(\equiv \sum_{s=0}^{n-1}\right)^{2)},$$

worin die Koeffizienten B_{s+1} die *Bernoulli*schen Zahlen bedeuten, vorzuziehen, welche für $n = \infty$ *divergiert* und $\mu(x)$ nur *asymptotisch* darstellt, in dem Sinne, daß

$$\lim_{|x|=\infty} |x|^{2n} \cdot \left| \mu(x) - \sum_{s=0}^{n-1} \right| = 0$$

ist für $-\pi < \theta < +\pi$ $(x = |x| e^{\theta i})$ [3]).

In engem Zusammenhange mit der Differenzengleichung **1.** steht die Gleichung

3. $$y_{x+1} + y_x = \frac{1}{x}.$$

Hier können wir direkt eine Partialbruchreihe ansetzen:

$$y_x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{x+s},$$

und wir erhalten für die Koeffizienten a_s die Gleichungen:

$$a_0 = 1, \quad a_s + a_{s+1} = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \ldots),$$

also:

$$a_s = (-1)^s,$$

1) *Binet* l. c.; vgl. *Schlömilch*, **1.**, S. 259—260; *Whittacker*, Modern Analysis (Cambridge 1902), S. 189; *Nielsen*, **3.**, § 114.

2) *Stirling*, **1.**, S. 135; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 79. Das Zeichen $\sim$ bedeutet „asymptotisch gleich". Diese Reihe ergibt sich aus der *Euler*schen Summenformel (*1. Kap.*, II, B, Gl. (l)) für $\varphi(x) = \log x$ (*Euler*, **2a.**, Kap. VI, 159; vgl. *Gauß*, **1.**, Nr. 29).

3) Diese Definition der asymptotischen Darstellung einer Funktion rührt von *Poincaré* her (Acta Math. 8, 297 (1886)).

und somit als Partikularlösung die mit Ausnahme der einfachen Pole $x = 0, -1, -2, \ldots$ bedingt konvergente Partialbruchreihe

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} \text{ [1]},$$

welche der Bedingung

$$\lim_{\Re(x)=\infty} \beta(x) = 0$$

genügt; die allgemeine Lösung lautet: $y_x = \omega_x e^{\pi i x} + \beta(x)$.

Die Funktion $\beta(x)$ ist nahe verwandt mit der Funktion $\Psi(x)$, mit der sie vermöge der Gleichungen **1.** und **3.** durch die Relation

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

verbunden ist. Die *Taylor*sche Reihe ergibt die Potenzreihenentwickelung

$$\beta(1+x) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \sigma_r x^{r-1} \quad (|x| < 1),$$

worin

$$\sigma_r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^r}$$

ist; auch hier lassen sich wie bei $\Psi(1+x)$ rascher konvergierende Potenzreihen aufstellen (vgl. *Nielsen*, **3.**, § 14).

Etwas allgemeiner ist die Differenzengleichung

$$\textbf{4.} \qquad y_{x+1} - \frac{1}{a} y_x = \frac{1}{x} \quad (a \text{ eine Konstante}).$$

Hier ergibt derselbe Ansatz wie bei **3.** die Partialbruchreihe

$$\eta_x = -a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{x+s},$$

welche mit Ausnahme der einfachen Pole $x = 0, -1, -2, \ldots$ für die endlichen Werte von x unbedingt konvergiert, falls $|a| < 1$ ist; die allgemeine Lösung lautet

$$y_x = \omega_x a^{-x} + \eta_x \text{ [2]}.$$

Die im *4. Kap.*, II, 8. Beispiel, gegebene Integraldarstellung einer Partikularlösung der Gleichung **4.**:

$$\bar{y}_x = \int_0^1 \frac{a}{at-1} t^{x-1} = -a \int_0^1 \frac{t^{x-1}\,dt}{1-at} \quad (|a| < 1,\ \Re(x) > 0)$$

---

1) *Stirling*, **1.**, S. 27; *Nielsen*, § 5, § 14; W. 2) W.

führt einerseits mit Rücksicht auf

$$\frac{1}{1 - at} = 1 + at + a^2t^2 + \cdots$$

durch gliedweise Integration zu der obigen Partialbruchreihe [illegible] $\bar{y}_x = \eta_x$ (also hier $\omega_x = 0$) ist [1], andererseits durch wiederholte [illegible] Integration zu der Fakultätenreihe

$$y_x = \eta_x = \sum_{s=0}^{\infty} [illegible]$$

welche für alle endlichen x mit Ausnahme der einfache[illegible] $x = 0, -1, -2, \ldots$ unbedingt konvergiert, falls

$$\left| \frac{a}{a-1} \right| < 1, \text{ d. h. } \Re(a) < \frac{1}{2}$$

ist [2]).

Für $a = \frac{1}{2}$ erhält man die Funktion [illegible] (x) [3]), wo

$$\alpha(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2-t} \, dt = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}}{x+s} = \sum [illegible]$$

ist und die Fakultätenreihe für $0 < \Re(x) < 1$ nur bedingt, für $\Re$ [illegible] dagegen unbedingt konvergiert. Für $a = -1$ erhält man die [illegible] betrachtete Funktion $\beta(x)$, für welche sich somit die Fakultät[illegible]

$$\beta(x) = \sum [illegible]$$

ergibt, die schon *Stirling* [4]) bekannt war.

Bisher haben wir nur solche vollständigen Differenzengleichungen erster Ordnung betrachtet, bei denen die [illegible] Gleichung konstante Koeffizienten besitzt; [illegible] Reihen entwickeln [illegible] Lösungen solcher Gleichungen [illegible] Ordnung [illegible] die Koeffizienten der Reduzierten [illegible] noch die Behandlung der homogenen Gleichung

$$[illegible] = 0$$

nachholen, die erst an dieser Stelle [illegible] Lösung [illegible] selben ist ja die Funktion [illegible]

1) [illegible] 2) *Nielsen*, 3., [illegible]

3) *Nielsen*, 3., S. 216.

4) *Stirling*, 1., S. [illegible]

Differenzengleichungen von fundamentaler Bedeutung ist und für die wir bereits im ersten Kapitel (II, C) eine Integraldarstellung und eine Darstellung durch ein unendliches Produkt angegeben haben; aber gerade die Reihenentwickelung der Gammafunktion bietet eigentümliche Schwierigkeiten dar, während nach Formel (5) der Einleitung dieses Kapitels (vgl. auch I, A, **1.** und **2.**) gewisse Produkte von Gammafunktionen durch elegante hypergeometrische Reihen dargestellt werden können. Zunächst ergibt sich aus der *Binet*schen Entwickelung von $\mu(x)$ in eine Fakultätenreihe (dieses Kapitel I, B, **2.**, S. 233):

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)} \quad (\Re(x) > 0).$$

Um zu einer Potenzreihe für $\Gamma(1+x)$:

$$\Gamma(1+x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

zu gelangen, benutzen wir die Reihe für $\Psi(1+x)$ (dieser Abschnitt B, **1.**):

$$\Psi(1+x) = -s_1 + s_2 x - s_3 x^2 + s_4 x^3 - \cdots;$$

die Identität

$$\Gamma'(1+x) = \Gamma(1+x)\,\Psi(1+x)$$

liefert nämlich für die c_n die Rekursionsformel

$$(n+1)\, c_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} s_{r+1} c_{n-r}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

welche in Verbindung mit dem Anfangswert $c_0 = 1$ die sukzessive Berechnung der c_n gestattet[1]).

Für die Koeffizienten der beständig konvergenten Potenzreihe[2])

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots$$

findet man durch Multiplikation mit der Reihe für $\Gamma(1+x)$ die Beziehungen

$$\gamma_0 = 1, \quad \sum_{r=0}^{n} c_n \gamma_{n-r} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

und aus der Identität

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1+x)} = -\frac{\Psi(1+x)}{\Gamma(1+x)}$$

1) *Nielsen*, **3.**, § 15.

2) $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$ ist eine ganze transzendente Funktion (vgl. *1. Kap.*, II, C).

die Rekursionsformel

$$(n+1)\gamma_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r s_{r+1} \gamma_{n-r}\ ^{1)}.$$

Independente Ausdrücke für die Koeffizienten c_n und γ_n *in einfacher Form* sind bis jetzt nicht bekannt; man vergleiche wegen derselben *Nielsen*, **3.**, § 15 u. § 16, wo man auch die vollständige Literatur über diesen Gegenstand angegeben findet.

Die wahre Natur der Gammafunktion tritt aber erst durch ihre Zerlegung in die Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$ (vgl. *1. Kap.*, II, C) hervor, und es ist das Verdienst von *Prym*[2]), zuerst die funktionentheoretische Bedeutung von $P(x)$ und $Q(x)$ für die Gammafunktion klargestellt zu haben. Diese beiden Funktionen genügen nun ebenfalls nichthomogenen linearen Differenzengleichungen, denen wir uns jetzt zuwenden.

5.
$$y_{x+1} - x y_x = -1.^{3)}$$

Die formale Lösung lautet nach dem *3. Kap.*, V:

$$y_x = \omega_x \Gamma(x) - \Gamma(x) \sum \frac{1}{\Gamma(x+1)},$$

worin ω_x eine willkürliche „Konstante" ist.

Wir setzen zunächst eine Fakultätenreihe an:

$$y_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^{(k)}};$$

dann ist

$$y_{x+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(x+1)^{(k)}}, \quad x y_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{(x+1)^{(k)}} \quad ((x+1)^{(0)} = 1),$$

also

$$y_{x+1} - x y_x = -a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - a_{k+1}}{(x+1)^{(k)}}.$$

Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf **5.**:

$$a_1 = 1, \quad a_k - a_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

d. h.

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 1.$$

1) *Schlömilch*, Zeitschr. für Math. u. Phys. **25**, 104 (1880).
2) *Prym*, **1.**; *Scheefer*, **1.**; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 9.
3) W.; vgl. *Prym*, **1.**; *Scheefer*, **1.**

Eine Partikularlösung von **5.** lautet also:

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{(k)}},$$

in der ganzen (endlichen) Ebene gültig mit Ausnahme der einfachen Pole $x = 0, -1, -2, \ldots$, und daher die allgemeine Lösung:

$$y_x = \omega_x \Gamma(x) + H(x).$$

Aus **5.** ergibt sich noch

$$\frac{H(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{H(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{\Gamma(x+1)},$$

also

$$\frac{H(x+n)}{\Gamma(x+n)} = \frac{H(x)}{\Gamma(x)} - \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(x+s)};$$

nun ist aber

$$\frac{H(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(x+s)},$$

folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{H(x+n)}{\Gamma(x+n)} = 0;$$

durch die Gleichung **5.** und diese Grenzbedingung ist die Partikularlösung $H(x)$ eindeutig bestimmt, da aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_{x+n}}{\Gamma(x+n)} = 0$$

sofort $\omega_x = 0$, d. h. $y_x = H(x)$ folgt.

Sodann setzen wir eine Partialbruchreihe an:

$$y_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x+k}, \quad y_{x+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{x+k},$$

$$x y_x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x+k-k}{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\, a_k}{x+k},$$

$$y_{x+1} - x y_x = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1} + k a_k}{x+k} = -1;$$

also

$$a_{k-1} + k a_k = 0 \ (k = 1, 2, 3, \ldots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} a_0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

und dann aus der zweiten Gleichung

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1, \quad \text{d. h. } a_0 e^{-1} = 1, \quad a_0 = e.$$

Eine Partikularlösung von **5.** lautet also:

$$\overline{y}_x = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{x+k} = e\,P(x),$$

in der ganzen Ebene gültig mit Ausnahme der einfachen Pole $x = 0, -1, -2, \ldots$; darin ist $P(x)$ die oben erwähnte Funktion, die mit $\Gamma(x)$ sämtliche Pole und deren Residuen gemeinsam hat (vgl. *1. Kap.*, II, C). Mittels der Umwandlungsformel (3) dieses Abschnittes zeigt man leicht, daß

$$H(x) = e\,P(x)\,^{1)}$$

ist. — Die beiden direkt aus der Differenzengleichung **5.** gewonnenen Entwickelungen für $P(x)$, die Fakultätenreihe $e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{(k)}}$ und die Partialbruchreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{x+k}$, ergeben sich auch aus der Integraldarstellung[2])

$$P(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad (\Re(x) > 0)$$

durch wiederholte partielle Integration bzw. durch Entwickelung von e^{-t} in eine Potenzreihe und gliedweise Integration in ähnlicher Weise wie bei **4.** — Die Vergleichung des oben gefundenen Resultates mit der formalen Lösung ergibt noch die Formel

$$\sum \frac{1}{\Gamma(x+1)} = -e \frac{P(x)}{\Gamma(x)} + \omega_x, \quad (\omega_{x+1} = \omega_x)\,^{3)};$$

genauer folgt aus unseren Entwickelungen:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(x+s)} = \frac{e\,P(x)}{\Gamma(x)}\,^{4)}.$$

1) $P(x)$ selber genügt der Differenzengleichung $y_{x+1} - x y_x = -e^{-1}$.
2) Vgl. *1. Kap.*, II, C u. *8. Kap.*, II, A.
3) *Lindhagen*, **1.**, S. 43.
4) Vgl. *Whittaker*, l. c. S. **177**.

Die ganze transzendente Funktion $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$ genügt der ganz ähnlichen Differenzengleichung

$$y_{x+1} - x y_x = e^{-1}$$

und ist durch diese und die Grenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(x+n)}{\Gamma(x+n)} = 1$$

eindeutig bestimmt. Ihre Reihenentwickelung bietet dieselben Schwierigkeiten wie die der Gammafunktion selber; die aus ihrer Differenzengleichung direkt abgeleiteten Reihen ergeben nicht $Q(x)$ selbst, sondern $Q(x) - \Gamma(x) = -P(x)$.

Ganz ähnlich lassen sich die etwas allgemeineren Differenzengleichungen

$$y_{x+1} - x y_x = \mp e^{-a} a^x$$

behandeln, die man zunächst durch die Substitution $y_x = e^{-a} a^{x-1} u_x$ auf die einfacheren Gleichungen

$$u_{x+1} - \frac{x}{a} u_x = \mp 1$$

zurückführt; die ihnen genügenden Funktionen

$$P_a(x) = \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{und} \quad Q_a(x) = \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \text{ [1]}$$

$$(P_1(x) = P(x), \quad Q_1(x) = Q(x))$$

sind besonders von *Hermite*[2]) untersucht worden, $P_a(x)$ bereits von *Legendre*[3]); es ergibt sich:

$$P_a(x) = e^{-a} a^x \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a^{s-1}}{x^{(s)}} = a^x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{a^s}{x+s}.$$

Für $Q_a(y)$ hat *Hermite* (l. c.; vgl. *Nielsen*, **3.**, §§ 82—83) folgende bemerkenswerte Entwickelung gegeben: Setzt man

$$Q_n = \int_{a+n}^{a+n+1} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

so ergibt sich aus dem Integralausdruck für $Q_a(x)$:

$$Q_a(x) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots.$$

1) Vgl. 8. *Kap.*, II, A. 2) Journ. für Math. **90**, 332—338 (1881)
3) Exercices de calcul intégral **1**, 339—343 (1811); die weitere Literatur siehe bei *Nielsen*, **3.**, §§ 9—13, 80—85.

Um das Teilintegral Q_n umzuformen, setzt man $a + n + z = t$; dann folgt

$$Q_n = (a+n)^{x-1} e^{-(a+n)} \int_0^1 e^{-z} \left(1 + \frac{z}{a+n}\right)^{x-1} dz.$$

Entwickelt man nun unter den Voraussetzungen $|a+n| > 1$, $\Re(a+n) > 0$ (für $n = 0, 1, 2, \ldots$) den Ausdruck $\left(1 + \frac{z}{a+n}\right)^{x-1}$ nach dem Binomialsatze und integriert gliedweise, so erhält man:

$$Q_n = (a+n)^{x-1} e^{-(a+n)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{P(s+1)}{(a+n)^s} \binom{x-1}{s} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke ergibt sich für $Q_a(x)$ eine Doppelreihe, deren einzelne Horizontal- und Vertikalreihen unter den obigen Voraussetzungen wie Potenzreihen konvergieren, sodaß man dieselbe nach den Binomialkoeffizienten $\binom{x-1}{n}$ ordnen darf; setzt man daher zur Abkürzung

$$R_a(x) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-(a+r)} (a+r)^{x-1},$$

so entsteht die Formel von *Hermite:*

$$Q_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n+1) R_a(x-n) \binom{x-1}{n};$$

darin ist nach Obigem

$$P(n+1) = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+s+1)!} = n! \left(1 - \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!}\right).$$

Für $a = 1$, d. h. für $Q_1(x) = Q(x)$ gilt diese Formel nicht mehr; durch eine leichte Modifikation ergibt sich für diesen Fall die Entwickelung von *Mellin* (Acta Math. 2 (1883), 231—232):

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathfrak{P}(n+1) R(x-n) \binom{x-1}{n},$$

worin $R(x) = R_2(x)$ und

$$\mathfrak{P}(n+1) = \int_0^1 e^t t^n \, dt = e \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s n!}{(n+s+1)!} = n! \left(e \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{(n-s)!} - (-1)^n\right)$$

ist.

Mellin[1]) hat die allgemeine Differenzengleichung

$$y_{x+1} - r(x)\, y_x = -s(x)$$

untersucht, worin $r(x)$ und $s(x)$ rationale Funktionen von x sind. Man erhält sukzessive

$$y_x = \frac{s(x)}{r(x)} + \frac{y_{x+1}}{r(x)} = \frac{s(x)}{r(x)} + \frac{s(x+1)}{r(x)\, r(x+1)} + \frac{y_{x+2}}{r(x)\, r(x+1)} \quad \text{usf.}$$

Die vorliegende Differenzengleichung wird daher formell durch die Reihe

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s(x+\nu)}{r(x)\, r(x+1) \cdots r(x+\nu)}$$

befriedigt, welche unter gewissen Bedingungen für $r(x)$ und $s(x)$ konvergiert. Um zu einem abschließenden Resultat zu gelangen, beschränken wir uns auf den von *Lindhagen*[2]) behandelten Fall:

$$\textbf{6.} \qquad y_{x+1} - x\, y_x = R(x),$$

worin $R(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades in x ist[3]). Zunächst kann man nach der im *8. Kap.*, II, A angegebenen Methode durch die Substitution

$$y_x = G(x) + u_x,$$

worin $G(x)$ eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x ist, den Grad von $R(x)$ bis auf den nullten herabdrücken, sodaß die Gleichung für u_x folgendermaßen lautet:

$$u_{x+1} - x\, u_x = a \quad (a \text{ Konstante});$$

dieselbe besitzt nach **5.** die Lösung

$$u_x = -a\, e\, P(x),$$

sodaß die allgemeine Lösung von **6.** die Form hat:

$$y_x = \omega_x \Gamma(x) + G(x) - a\, e\, P(x), \quad (\omega_{x+1} = \omega_x).$$

Schreibt man die Funktion $R(x)$ in der interpolatorischen Form

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} k!\, a_k \binom{x}{k}\,^{4)},$$

worin

$$k!\, a_k = \Delta^k R(0) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} R(k-r)$$

1) *Mellin*, **3.** 2) *Lindhagen*, **1.**, S. 45 ff. 3) *W.*
4) *Newtons* Interpolationsformel; siehe z. B. *Seliwanoff*, **2.**, S. 6.

ist, und setzt auch $G(x)$ in dieser Form an:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k!\, b_k \binom{x-1}{k},$$

so wird

$$G(x+1) = \sum_{k=0}^{n-1} k!\, b_k \binom{x}{k}, \quad x\,G(x) = \sum_{k=1}^{n} k!\, b_{k-1} \binom{x}{k},$$

also

$$G(x+1) - x\,G(x) = \sum_{k=0}^{n} k!\,(b_k - b_{k-1}) \binom{x}{k}, \quad (b_n = b_{-1} = 0).$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten von $\binom{x}{k}$ $(k = n, n-1, \ldots, 1)$ auf beiden Seiten der Gleichung **6.**, d. h. der Gleichung

$$G(x+1) - x\,G(x) + a = R(x),$$

erhält man für die b_k das Gleichungssystem

$$b_k - b_{k-1} = a_k \quad (k = n, n-1, \ldots, 1;\ b_n = 0),$$

aus welchem sich

$$b_k = -\sum_{i=k+1}^{n} a_i \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

und daher

$$a = a_0 - b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

ergibt. — Auf anderem Wege ist *Jensen*[1]) zu dieser eleganten Lösung gelangt.

II. Hypergeometrische Differenzengleichungen zweiter Ordnung.

Unter diesen Differenzengleichungen verstehen wir diejenigen, welche durch die *Gauß*sche hypergeometrische Reihe integriert werden können. Dieselben besitzen die Gestalt

$$1) \qquad A z_{h+2} + (B + Ch) z_{h+1} + (D + Eh + Fh^2) z_h = 0\text{[2]}),$$

worin A, B, C, D, E, F Konstanten sind, und können durch eine geeignete Transformation[3]) auch auf die *Laplace*sche Form

$$2) \qquad (A + Bh) z_{h+2} + (C + Dh) z_{h+1} + (E + Fh) z_h = 0$$

1) *Jensen*, **3.**, S. 60; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 11.

2) Wir nennen hier aus bald ersichtlichen Gründen die unabhängige Veränderliche nicht x, sondern h.

3) Vgl. *9. Kap.*, I, A., Anmerkung.

gebracht werden; die umgekehrte Transformation, durch welche die Gleichung (2) in (1) übergeführt wird, wird später genau angegeben werden.

Es gibt mehrere Wege, um hier zu Reihenentwickelungen für die Lösungen von (1) bzw. (2) zu gelangen. Zunächst hat *Boole*[1]) mit Hilfe seiner symbolischen Methoden durch direkte Ansätze Reihen hergeleitet; doch fehlt durchweg die Untersuchung ihrer Konvergenz, und es werden nur einzelne Fälle angegeben, wo die Reihen endlich sind, d. h. nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen.

Der zweite Weg geht von der Gleichung (2) aus, die ja eine *Laplace*sche Differenzengleichung (*8. Kap.*, I) ist, und führt über die Darstellung ihrer Lösungen durch *Euler*sche Integrale von der in der Einleitung zu diesem Abschnitt angegebenen Form. Diesen Weg hat mit Erfolg zuerst (1869) *Thomae*[2]) beschritten; er gelangt von den *Euler*schen Integralen zunächst zur *Riemann*schen P-Funktion[3]) und von dieser zu der *Gauß*schen Reihe; nach ihm haben später (1904) *Webb*[4]) und *Barnes*[5]) denselben Weg verfolgt.

Der dritte und natürlichste Weg, der von der Gleichung (1) ausgeht, knüpft an die *Gauß*sche Abhandlung (**1.**) selber an: *Gauß* hat dort in Nr. 7. und Nr. 10. folgende Beziehungen zwischen drei „benachbarten" Funktionen (series contiguae) aufgestellt:

$$(3)\qquad (\gamma-2\alpha-(\beta-\alpha)x)F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma,x) \\ -(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)=0\,^{6}),$$

$$(4)\quad \gamma(\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x)F(\alpha,\beta,\gamma,x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1,x) \\ -\gamma(\gamma-1)(1-x)\,F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)=0\,^{7}),$$

$$(5)\quad \gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta,\gamma,x)-(\gamma+1)(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x) \\ -(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)\,F(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2,x)=0\,^{8}).$$

Diese Beziehungen stellen aber nichts anderes dar als lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung für die Funktion $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, aufgefaßt als Funktion ihrer ersten drei Elemente, während x als Parameter fungiert. Man könnte nun von einer dieser Gleichungen als Normalform ausgehen: da man aber zunächst nur *eine* Lösung derselben kennt, nämlich $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, so müßte man sich auf das ziem

1) *Boole*, **1.** (Deutsche Ausgabe), S. 181 ff.

2) *Thomae*, **1.**; in einer zweiten Arbeit (**2.**) benutzt er zu demselben Zweck die von ihm (Math. Ann. **2.** (1870), 427—444) behandelten hypergeometrischen Reihen dritter Ordnung.

3) *Riemann*, „Beiträge zur Theorie der durch die *Gauß*sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Funktionen". (1857) Werke (2. Aufl. 1892), S. 67 ff.

4) *Webb*, **1.** 5) *Barnes*, **3.** 6) Nr. **7.**, Gl. [1].

7) Nr. **7.**, Gl [15]. 8) Nr. **10.**, Gl. IX.

lich umständliche Transformationsproblem einlassen. Wir ziehen es daher vor, die Methode von *Heymann*[1]) zu befolgen, welche die von *Gauß*, *Riemann* und *Kummer*[2]) gewonnenen Resultate für unseren Zweck nutzbar macht und so auf dem kürzesten Wege zum Ziel führt.

Wir gehen aus von der ebenfalls schon *Euler* bekannten *Gauß*schen Differentialgleichung, der die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ genügt, nämlich:

$$(6) \qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0;$$

aus dieser folgt durch h-malige Differentiation nach x:

$$(7) \qquad x(1-x)y^{(h+2)} + [(1-2x)h + \gamma - (\alpha+\beta+1)x]y^{(h+1)} - (\alpha+h)(\beta+h)y^{(h)} = 0,$$

und diese Gleichung, in welcher von jetzt ab h die unabhängige, $y^{(h)} = y_h$ die abhängige Veränderliche sein soll, bezeichnen wir als *Normalform* der hypergeometrischen Differenzengleichung zweiter Ordnung. Allerdings ist h seiner Natur nach zunächst als ganze positive Zahl vorauszusetzen; doch werden wir uns bald von dieser Beschränkung befreien: wir betrachten überhaupt diesen Differentiationsprozeß lediglich als heuristisches Prinzip, um zu Lösungen der Differenzengleichungen (1) bzw. (2) zu gelangen, die dann nachträglich verifiziert werden.

Nach der *Kummer*schen Transformationstheorie gibt es 24 Integralformen, welche der Gleichung (6) genügen; doch sind von diesen immer je vier einander gleich, sodaß wir nur sechs Hauptlösungen anzugeben haben, nämlich:

$$(8) \qquad \begin{cases} y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ y_2 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x), \\ y_3 = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x), \\ y_4 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x), \\ y_5 = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right), \\ y_6 = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Daraus gehen mit Rücksicht auf die Formel

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

---

1) *Heymann*, **1.**, S. 299ff; **3.**

2) *Gauß*, **1.**, 2. Teil (Nachlaß); *Kummer*, **1.**; *Riemann* l. c.

durch h-malige Differentiation folgende sechs Hauptlösungen der Differenzengleichung (7) hervor:

$$
\left\{
\begin{aligned}
y_1^{(h)} &= \frac{\Gamma(\alpha+h)\,\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\gamma+h)}\, F(\alpha+h,\, \beta+h,\, \gamma+h,\, x),\\
y_2^{(h)} &= (-1)^h \frac{\Gamma(\alpha+h)\,\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1+h)}\, F(\alpha+h,\, \beta+h,\, \alpha+\beta-\gamma+1+h,\, 1-x),\\
y_3^{(h)} &= (-1)^h x^{-h}\, \Gamma(\gamma-1+h)\, F(\alpha-\gamma+1,\, \beta-\gamma+1,\, 2-\gamma-h,\, x),\\
y_4^{(h)} &= (1-x)^{-h}\, \Gamma(\alpha+\beta-\gamma+h)\, F(\gamma-\alpha,\, \gamma-\beta,\, \gamma-\alpha-\beta+1-h,\, 1-x),\\
y_5^{(h)} &= (-1)^h x^{-h}\, \Gamma(\alpha+h)\, F\left(\alpha+h,\, \alpha-\gamma+1,\, \alpha-\beta+1,\, \frac{1}{x}\right),\\
y_6^{(h)} &= (-1)^h x^{-h}\, \Gamma(\beta+h)\, F\left(\beta+h,\, \beta-\gamma+1,\, \beta-\alpha+1,\, \frac{1}{x}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Die periodischen Integrations-„Konstanten“ und sonstige Konstanten, die von den ersteren aufgenommen werden können, sind fortgelassen worden (dabei ist zu beachten, daß h die unabhängige Variable und x ein konstanter Parameter ist); etwaige in den Gammafunktionen auftretende (einfache) Pole der Lösungen können durch Multiplikation mit geeigneten periodischen Funktionen beseitigt werden, z. B. bei den Lösungen $y_1^{(h)}$ und $y_2^{(h)}$ durch Multiplikation mit

$$\sin 2\pi(\alpha+h) \cdot \sin 2\pi(\beta+h).$$

Setzt man nun diese auf heuristischem Wege gefundenen Lösungen in die Normalgleichung (7) ein, so ergeben sich nach einer naheliegenden Buchstabenveränderung gerade die *Gauß*schen *identischen* Beziehungen (3), (4), (5) zwischen den „benachbarten“ Funktionen, und zwar die Beziehung (5), (4) oder (3), je nachdem man $y_1^{(h)}$ und $y_2^{(h)}$ oder $y_3^{(h)}$ und $y_4^{(h)}$ oder $y_5^{(h)}$ und $y_6^{(h)}$ in (7) einträgt. Es kann daher nunmehr h jede beliebige reelle oder komplexe Zahl bedeuten.

Will man sämtliche 24 Integralformen haben, die *Kummer* in der zitierten Abhandlung aufgestellt hat, so braucht man nur die sechs Integrale unter (9) mittels der Identität

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, x)$$

umzuformen; auf die nun vorhandenen 12 Integrale wende man dann die bekannte *Euler*sche Transformationsformel

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{x}{x-1}\right)$$

an. Auf diese Weise bekommt man für jeden Wert der Variablen h und der Parameter α, β, γ, x passende Lösungen der Normalform (7); insbesondere wird man auch leicht die Fälle erkennen, in denen die Lösungen rational bzw. algebraisch werden.

Um nun die Differenzengleichung (1) auf die Normalform (7) zu bringen, erteile man ihr zunächst die Form

$$(10)\qquad a z_{h+2} + (b + ch) z_{h+1} - (\alpha + h)(\beta + h) z_h = 0.$$

Die Substitution $z_h = \varrho^h y_h$, wo ϱ eine noch zu bestimmende Konstante ist, ergibt dann:

$$a\varrho^2 y_{h+2} + (b + ch)\varrho y_{h+1} - (\alpha + h)(\beta + h) y_h = 0,$$

und diese Gleichung fällt mit der Normalform (7) zusammen, wenn

$$a\varrho^2 = x(1-x), \quad b\varrho = \gamma - (\alpha + \beta + 1)x, \quad c\varrho = 1 - 2x$$

ist: hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{4a + c^2}}, \quad x = \frac{1 - c\varrho}{2}, \quad \gamma = b\varrho + (\alpha + \beta + 1)x,$$

wodurch alle Parameter bestimmt sind.

Das Wurzelzeichen in dem Ausdruck für ϱ bringt in die Transformation eine Zweideutigkeit hinein, die sich leicht beseitigen läßt. Transformiert man nämlich die Gleichung (1) bzw. (10) zunächst mit positivem ϱ in die Normalform

$$x_1(1-x_1) y^{(1)}_{h+2} + [(1-2x_1)h + \gamma_1 - (\alpha+\beta+1)x_1] y^{(1)}_{h+1} - (\alpha+h)(\beta+h) y_h = 0,$$

so kann man auf diese Gleichung die Transformation von neuem anwenden; für diese ist:

$$\left\{\begin{array}{lll} \varrho = +1 & \text{oder} & -1, \\ \gamma = \gamma_1 & \text{oder} & \alpha + \beta - \gamma_1 + 1, \\ x = x_1 & \text{oder} & 1 - x_1. \end{array}\right.$$

Die erste Gruppe ändert naturgemäß in der Beschaffenheit der Parameter nichts; die zweite lehrt, daß der Gleichung (7) auch hypergeometrische Reihen genügen, welche nach Potenzen von $1 - x$ fortschreiten, ein Umstand, der schon bei den Integralen unter (9) genügend berücksichtigt worden ist.

Sehr einfach läßt sich jetzt die Integration der Differenzengleichung (2) erledigen; denn gibt man ihr die Form

$$a(\alpha + h + 1) v_{h+2} + (b + ch) v_{h+1} - (\beta + h) v_h = 0,$$

so führt die Substitution

$$v_h = \frac{z_h}{\Gamma(\alpha + h)} \quad \text{oder} \quad v_h = (-1)^h \Gamma(1 - \alpha - h) z_h \text{ [1])}$$

---

1) Der Zusammenhang dieser beiden „komplementären" Substitutionen wird durch die *Euler*sche Formel $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ (vgl. *1. Kap.*, II, C) hergestellt.

zu der eben behandelten Gleichung (10). Die Gleichung

$$(A + Bh + Ch^2)v_{h+2} + (D + Eh)v_{h+1} + Fv_h = 0$$

endlich wird durch die Substitution $h = -t - 2$, $v_{-t} = y_t$ in eine Gleichung von der Form (1) transformiert.

Ausnahmefälle[1]: Die Zurückführung der Gleichung (1) bzw. (10) auf die Normalform (7) ist in einigen Fällen nicht möglich, insbesondere dann, wenn sich für eines der Elemente α, β, γ unendliche Werte ergeben.

1. Die Transformation versagt z. B., wenn $4a + c^2 = 0$, also $\varrho = \infty$ und daher auch $\gamma = \infty$ ist. Um diesen Fall zu erledigen, substituiere man in die Normalform (7) sowie in die fünfte und sechste Lösung unter (9):

$$x = \gamma\xi, \quad y_h = \gamma^{-h}\eta_h,$$

und gehe darauf zur Grenze $\gamma = \infty$ über; dann erhält man

$$-\xi^2\eta_{h+2} + [1 - 2\xi h - (\alpha + \beta + 1)\xi]\eta_{h+1} - (\alpha + h)(\beta + h)\eta_h = 0.$$

Auf diese neue Normalform kann die Gleichung (10), wenn $a + c^2 = 0$ ist, stets durch die Substitution $z_h = \varrho^h\eta_h$ gebracht werden, falls $(\alpha + \beta + 1)c - 2b \neq 0$ ist; man findet nämlich

$$\varrho = \frac{2}{2b - (\alpha + \beta + 1)c}, \quad \xi = \frac{c}{(\alpha + \beta + 1)c - 2b};$$

derselben genügt:

$$\eta_h^{(1)} = (-1)^h \xi^{-h}\,\Gamma(\alpha + h)\, F\left(\alpha + h,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{\gamma\xi}\right)_{\gamma = \infty}$$

$$= (-1)^h \xi^{-h}\,\Gamma(\alpha + h)\left[1 - \frac{\alpha + h}{\alpha - \beta + 1}\,\frac{\xi^{-1}}{1!} + \frac{(\alpha + h)(\alpha + h + 1)}{(\alpha - \beta + 1)(\alpha - \beta + 2)}\,\frac{\xi^{-2}}{2!} \cdots\cdots\right].$$

Eine zweite Lösung ergibt sich durch Vertauschung von α und β; andere aufzustellen, ist nicht nötig, weil beide Reihen für jedes endliche h konvergieren (vorausgesetzt, daß $\alpha - \beta$ keine ganze Zahl ist).

Ist sowohl $4a + c^2 = 0$ als auch $(\alpha + \beta + 1)c - 2b = 0$[2], so lautet die Differenzengleichung (10):

$$-\frac{c^2}{4}z_{h+2} + \frac{c}{2}(\alpha + \beta + 1 + 2h)z_{h+1} - (\alpha + h)(\beta + h)z_h = 0;$$

dieselbe geht durch die Substitution $z_h = \left(\frac{c}{2}\right)^{-h} u_h$ über in die Gleichung

$$P \equiv u_{h+2} - (\alpha + \beta + 1 + 2h)u_{h+1} + (\alpha + h)(\beta + h)u_h = 0,$$

---

1) *Heymann*, **1.**, l. c. 2) W.

welche die beiden Lösungen

$$u_h^{(1)} = \Gamma(\alpha + h) \quad \text{und} \quad u_h^{(2)} = \Gamma(\beta + h)$$

besitzt. Es ist nämlich symbolisch

$$P = QR = RQ\,^{1)},$$

worin

$$Q \equiv u_{h+1} - (\alpha + h)u_h \quad \text{und} \quad R \equiv u_{h+1} - (\beta + h)u_h$$

ist, sodaß die Gleichung $P = 0$ durch die Lösungen von $Q = 0$ und $R = 0$ befriedigt wird. — Ist $\beta = \alpha$, so lautet unsere Differenzengleichung

$$P \equiv u_{h+2} - (2\alpha + 1 + 2h)u_{h+1} + (\alpha + h)^2 u_h = 0,$$

und es ist symbolisch

$$P = QQ = Q^2;$$

daher besitzt die Gleichung $P = 0$ zunächst die Lösung von $Q \equiv u_{h-1} - (\alpha + h)u_h = 0$, nämlich

$$u_h^{(1)} = \Gamma(\alpha + h);$$

ferner[2] die Lösung von $Q \equiv u_{h+1} - (\alpha + h)u_h = \Gamma(\alpha + h)$, also[3]

$$u_h^{(2)} = \Gamma(\alpha + h)\sum \frac{\Gamma(\alpha + h)}{\Gamma(\alpha + h + 1)} = \Gamma(\alpha + h)\sum \frac{1}{\alpha + h},$$

d. h.

$$u_h^{(2)} = \Gamma(\alpha + h)\,\Psi(\alpha + h) = \Gamma'(\alpha + h), \quad \left(\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right).\,^{4)}$$

2. Verschwindet in (1) der Koeffizient F, so wird α bzw. β unendlich groß, und an Stelle der Gleichung (10) tritt die folgende:

$$a z_{h+2} + (b + ch)z_{h+1} - (\alpha + h)z_h = 0.$$

Eine passende Normalform, auf welche diese Gleichung durch die Transformation $z_h = \varrho^h \eta_h$ gebracht werden kann, erhält man dadurch, daß man in die Normalform (7) und in die erste und dritte Lösung unter (9) die Substitution $x = \frac{\xi}{\beta}$, $y_h = \beta^h \eta_h$ einführt und dann zur Grenze für $\beta = \infty$ übergeht. Die neue Normalform lautet:

$$\xi \eta_{h+2} + (\gamma + h - \xi)\eta_{h+1} - (\alpha + h)\eta_h = 0,$$

und es ergibt sich $\varrho = \frac{1}{c}$, $\xi = \frac{a}{c^2}$, $\gamma = \frac{a + bc}{c^2}$; die zugehörigen Lösungen sind:

---

1) Vgl. 2. *Kap.*, V u. 6. *Kap.*, IV, C. 2) 3. *Kap.*, VI.
3) 3. *Kap.*, V. 4) 1. *Kap.*, II, C

$$\begin{cases} \eta_h^{(1)} = \dfrac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\gamma+h)} F\left(\alpha+h,\ \beta+h,\ \gamma+h,\ \dfrac{\xi}{\beta}\right)_{\beta=\infty}; \\ \eta_h^{(2)} = (-1)^h \xi^{-h}\, \Gamma(\gamma+h-1)\, F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma-h,\ \dfrac{\xi}{\beta}\right)_{\beta=\infty}; \end{cases}$$

dieselben konvergieren für jedes endliche h.

Da solche Grenzübergänge wie die eben benutzten durch die Untersuchungen von *Kummer* über die hypergeometrische Reihe (l. c.) hinlänglich bekannt sind, so geben wir für die Fälle $\alpha = \beta = \infty$ und $\beta = \gamma = \infty$ nur die Normalformen der entsprechenden Differenzengleichungen an; diese sind:

$$\xi\eta_{h+2} + (\gamma+h)\eta_{h+1} - \eta_h = 0,$$
$$\eta_{h+2} - \xi\eta_{h+1} - (\alpha+h)\eta_h = 0.$$

Weitere Untersuchungen nach dieser Richtung, insbesondere auch über vollständige Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit quadratischen Koeffizienten sowie über hypergeometrische Differenzengleichungen höherer Ordnung findet man ebenfalls bei *Heymann* (**1.**, S. 318 ff. und **3.**).

III. Differenzengleichungen beliebiger Ordnung mit rationalen Koeffizienten: Asymptotische Darstellung ihrer Lösungen durch Fakultätennormalreihen. [1]

In diesem Abschnitte müssen wir einiges aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen voraussetzen: man findet das Nötige z. B. bei *Heffter*, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, oder *Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 1. Band.

Es möge die Differenzengleichung

$$(1)\qquad P_n(x)u_{x+n} + P_{n-1}(x)u_{x+n-1} + \cdots + P_0(x)u_x = 0 \text{ [2]}$$

vorliegen, in welcher die $P_k(x)$ Polynome desselben Grades p sind; wir schreiben dieselben in der Form:

$$P_k(x) = C_{k_0} + C_{k_1}(x+k) + C_{k_2}(x+k)(x+k+1) + \cdots + C_{k_p}(x+k)(x+k+1)\cdots(x+k+p-1),$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

worin

$$r!\, C_{k_r} = \Delta^r P(-k-r) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

ist. Wir wenden nun auf die Gleichung (1) die *Laplace*sche Transformation [3]) an:

1) *Nörlund*, **3.**, **4.**; vgl. *Galbrun*, **1.**

2) Wir schreiben hier $P_k(x)$ statt $P_x^{(k)}$, um Verwechselungen mit der k^{ten} Ableitung vorzubeugen.

3) Vgl. *S. Kap.*, I; *Pincherle*, **1.** und **1**a; *Mellin*, **2.**; *Brajtzew*, **3.**

(2) $$u_x = \int t^{x-1} v(t)\, dt,$$

worin der Integrationsweg noch genauer angegeben werden wird. Durch partielle Integration ergibt sich

$$x u_x = t^x v(t) - \int t^x v'(t)\, dt,$$

und wir müssen die Integrationsgrenzen so wählen, daß für diese Werte von t das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet. Durch nochmalige partielle Integration erhält man dann

$$x(x+1)u_x = -t^{x+1} v'(t) + \int t^{x+1} v''(t)\, dt \text{ usf.},$$

und daher allgemein

$$x(x+1)\cdots(x+k-1)u_x = (-1)^k \int t^{x+k-1} v^{(k)}(t)\, dt,$$
$$\left(k = 1, 2, \ldots, p;\; v^{(k)}(t) = \frac{d^k v(t)}{dt^k}\right),$$

vorausgesetzt, daß die Integrationsgrenzen so gewählt worden sind, daß für diese Werte von t

$$t^{x+k} v^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

wird. Ebenso ergibt sich

$$(x+r)(x+r+1)\cdots(x+r+k-1)u_{x+r} = (-1)^k \int t^{x+r+k-1} v^{(k)}(t)\, dt,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p;\; r = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

vorausgesetzt, daß an den Integrationsgrenzen

(3) $$t^{x+r+k} v^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1;\; r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Wendet man jetzt die Transformation (2) auf die Gleichung (1) an, so findet man, daß $v(t)$ der Differentialgleichung

(4) $$Q_p(t)(-t)^p v^{(p)}(t) + Q_{p-1}(t)(-t)^{p-1} v^{(p-1)}(t) + \cdots$$
$$\cdots + Q_1(t)(-t) v'(t) + Q_0(t) v(t) = 0$$

genügen muß, worin

$$Q_i(t) = C_{0_i} + C_{1_i} t + \cdots + C_{n_i} t^n$$

ist. Diese Differentialgleichung gehört zur *Fuchs*schen Klasse[1]), wenn wir voraussetzen, daß die Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der „charakteristischen" Gleichung[2])

(5) $$Q_p(t) \equiv C_{0_p} + C_{1_p} t + \cdots + C_{n_p} t^n = 0 \quad (C_{0_p} \neq 0,\; C_{n_p} \neq 0)$$

von einander verschieden sind; wir denken sie uns so geordnet, daß

1) Vgl. *Heffter*, Kap. 15, oder *Schlesinger*, Nr. 62.
2) Vgl. *9. Kap.*, I, A.

$a_i \geqq a_j$, wenn $i < j$ ist; ihre Integrale verhalten sich alsdann in der ganzen Ebene „bestimmt“. Die singulären Stellen sind außer 0 und ∞ die Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der „charakteristischen“ Gleichung.

In der Umgebung des Punktes $t = 0$ existieren p Integrale von von der Form $t^{\alpha_i}\varphi(t)$, wo $\varphi(t)$ eine in der Umgebung des Punktes 0 holomorphe Funktion ist, während

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_p$$

die Wurzeln der Gleichung $P_0(x) = 0$ sind; wir ordnen dieselben so, daß

$$\Re(\alpha_1) \geqq \Re(\alpha_2) \geqq \cdots \geqq \Re(\alpha_p)$$

ist. Wenn einige dieser Wurzeln sich um ganze Zahlen unterscheiden bzw. einander gleich sind, so werden in dem allgemeinen Integral Logarithmen auftreten.[1])

In der Umgebung des Punktes $t = \infty$ existieren p Integralreihen von der Form

$$t^{-\gamma_i}\left(c_0 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots\right),$$

welche für hinreichend große Werte von t konvergieren. Die Exponenten γ_i sind die Wurzeln der Gleichung $P_n(x-n) = 0$; wir ordnen sie so, daß

$$\Re(\gamma_1) \geqq \Re(\gamma_2) \geqq \Re(\gamma_3) \geqq \cdots \geqq \Re(\gamma_p).$$

Was endlich die singulären Punkte a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ anbetrifft, so besitzt die zum Punkte a_i gehörige determinierende Gleichung[2]) die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, p-2, \beta_i$, worin β_i eine beliebige komplexe Zahl sein kann, die wir zunächst als nicht ganzzahlig voraussetzen. Das allgemeine Integral von (4) hat dann die Form

$$v(t) = \psi(t) + (t - a_i)^{\beta_i}\chi(t),$$

worin $\psi(t)$ und $\chi(t)$ in der Umgebung von a_i holomorph sind.

Wir wollen jetzt den Integrationsweg für das Integral (2) festsetzen, indem wir daran denken, daß die Integrationsgrenzen den Bedingungen (3) genügen müssen: Wir ziehen eine gerade Linie von 0 nach a_i; es sei b_i ein Punkt derselben zwischen 0 und a_i und so nahe an a_i, daß ein um a_i als Mittelpunkt beschriebener Kreis, der durch b_i geht, durch keinen singulären Punkt hindurchgeht und auch außer a_i keinen anderen singulären Punkt einschließt. Wir integrieren dann längs der geraden Linie von 0 bis b_i, durchlaufen die Peripherie des Kreises und darauf die gerade Linie von b_i bis 0. Alsdann werden die Bedingungen (3) erfüllt sein, wenn $\Re(x + \alpha_p) > 0$ ist. Es wird

1) *Heffter*, Kap. 7; *Schlesinger*, Kap. 3 und 4.
2) *Heffter*, 1 *Kap.*, Nr. 7; *Schlesinger*, Nr. 45.

dann mit Berücksichtigung des *Cauchy*schen Satzes, welcher besagt, daß das über einen geschlossenen Weg erstreckte Integral einer holomorphen Funktion gleich Null ist, eine Lösung der Differenzengleichung (1):

$$u_i(x) = \int t^{x-1}(a_i - t)^{\beta_i} \varphi_i(t)\, dt,$$

worin auch $\varphi_i(t)$ eine in der Umgebung von a_i holomorphe Funktion ist. Integriert man in dieser Weise um jeden der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so erhält man n Integrale der Gleichung (1); wir werden später zeigen, daß zwischen ihnen keine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten besteht. Diese Integrale gelten überall in einer Halbebene rechts von der zur reellen Achse senkrechten Geraden $\Re(x) = \Re(-\alpha_p)$, wo $-\alpha_p$ diejenige Wurzel von $P_0(x) = 0$ ist, welche den größten reellen Teil besitzt.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich u_x $(= u(x))$ für sehr große reelle positive Werte von x verhält. Zu diesem Zwecke teilen wir den Integrationsweg in drei Teile: 1) die Strecke von 0 bis b_i [1]), 2) die Peripherie des Kreises um a_i, 3) die Strecke von b_i bis 0 [1]), und bezeichnen die entsprechenden Integrale mit K_1, K_2 und K_3; wir betrachten zuerst

$$K_1 = \int_0^{b_i} t^{x-1} v(t)\, dt.$$

Es sei M der Modul des größten Wertes, den $t^{-\alpha_p} v(t)$ längs des Integrationsweges annimmt; dann ist für genügend große positive x:

$$|K_1| < M\, |b_i|^{x+\alpha_p},$$

und da $|b_i| < |a_i|$ ist, so wird

$$(6) \qquad \lim_{x=\infty} a_i^{-x} \frac{\Gamma(x+\mu+1)}{\Gamma(x)} K_1 = 0$$

für alle endlichen Werte von μ [2]); dasselbe gilt für K_3.

Um sodann das Verhalten von K_2 für große x zu untersuchen, betrachten wir das Integral

$$T = \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta} \varphi(t)\, dt,$$

---

[1]) Sollte auf der Strecke zwischen 0 und b_i ein anderer singulärer Punkt a_r liegen, so muß der Integrationsweg an demselben vorbeiführen.

[2]) Dies folgt daraus, daß für große Werte von x sich $\frac{\Gamma(x+\mu+1)}{\Gamma(x)}$ wie $x^{\mu+1}$ verhält (vgl. den Ausdruck für $\Gamma(x)$ S. 237) und $\lim_{x=\infty} x^\nu \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^x = 0$ ist für jedes endliche ν.

rin $\Re(\beta) > -1$ und ε eine positive Zahl zwischen 0 und 1 ist, hrend $\varphi(t)$ sich in der Umgebung des Punktes 1 in eine Reihe der Form

$$\varphi(t) = A_0 + A_1(1-t) + A_2(1-t)^2 + \cdots + A_m(1-t)^m + R_m$$

wickeln läßt, welche für $|t-1| \leqq \varrho$ konvergiert, wo $1 \geqq \varrho > r$ $(r = 1 - \varepsilon)$. Wir wollen dann den Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)} T$$

bestimmen suchen: wenn wir $\varphi(t)$ in die obige Reihe entwickeln, wird

$$T = A_0 \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^\beta\, dt + A_1 \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta+1}\, dt + \cdots$$
$$\cdots + A_m \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta+m}\, dt + \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^\beta R_m\, dt.$$

läßt sich nun eine positive Größe M_1 so bestimmen, daß für es k

$$|A_k| < \frac{M_1}{\varrho^k}$$

d[1]); dann ist in dem Intervall $\varepsilon < t < 1$ (also $0 < 1 - t < r$):

$$|R_m| < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} M_1 \frac{1}{1 - \frac{r}{\varrho}}.$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$P = \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^\beta R_m\, dt;$$

d $\beta = \beta' + i\beta''$ gesetzt, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß Satz „Der absolute Betrag einer Summe ist kleiner oder gleich Summe der absoluten Beträge" auch für bestimmte Integrale gilt,

laß z. B. für $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (\Re(x) > 0)$

$$|\Gamma(u + vi)| \leqq \Gamma(u)^{2)} \quad (u > 0)$$

1) Vgl. z. B. *Weierstraß*, Abhandlungen aus der Funktionenlehre (Berlin 36), S. 93, 94.

2) Das Gleichheitszeichen gilt nur für $v = 0$.

ist:

$$|P| < M_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \frac{\varrho}{\varrho - r} \int_\varepsilon^1 |t^{x-1}(1-t)^{\beta'}|\, dt < M_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \frac{\varrho}{\varrho - r} \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(\beta'+1)}{\Gamma(x+\beta'+1)}.$$ [1]

Da $r < \varrho$ ist, kann man die endliche Zahl m so groß wählen, daß *für alle Werte von* x:

$$\frac{\Gamma(x+\beta'+1)}{\Gamma(x)} |P| < \frac{\delta}{3}, \tag{9}$$

also wegen (8) erst recht

$$\left| \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)} P \right| < \frac{\delta}{3}$$

wird, worin δ eine beliebig vorgegebene positive Größe ist.

Aus (7) erhält man nun[2]:

$$T - A_0 \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta}\, dt = - A_0 \int_0^\varepsilon t^{x-1}(1-t)^{\beta}\, dt + \sum_{k=1}^{m} Q_k + P,$$

worin

$$Q_k = A_k \int_\varepsilon^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta+k}\, dt;$$

also, da nach Formel (6) der Einleitung dieses Kapitels

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta}\, dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(x+\beta+1)}$$

ist,

$$\left| \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)} T - A_0\,\Gamma(\beta+1) \right| \leqq N + \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)} Q_k \right| + \left| \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)} P \right|, \tag{10}$$

worin

$$N = \frac{\Gamma(x+\beta'+1)}{\Gamma(x)} |A_0| \cdot \int_0^\varepsilon |t^{x-1}(1-t)^{\beta}|\, dt$$

gesetzt wurde. Nun ist aber, wenn $\varepsilon < \sigma < 1$:

$$\int_0^\varepsilon |t^{x-1}(1-t)^{\beta}|\, dt < \sigma^{x-1} \int_0^\varepsilon |(1-t)^{\beta}|\, dt,$$

und daher für ein genügend großes x:

$$N < \frac{\delta}{3} \quad \text{(vgl. S. 254, Anmerkung 2).}$$

---

1) Vgl. Formel (6) der Einleitung dieses Kapitels; es ist nämlich offenbar

$$\int^1 |t^{x-1}(1-t)^{\beta}|\, dt < \int^1 t^{x-1}(1-t)^{\beta'}\, dt$$

Ferner ist

$$|Q_k| < |A_k| \cdot \int_0^1 |t^{x-1}(1-t)^{\beta'+k}\, dt|,$$

also

(11) $$\left|\frac{\Gamma(x+\beta'+1)}{\Gamma(x)}\, Q_k\right| < |A_k| \frac{\Gamma(x+\beta'+1)\,\Gamma(\beta'+k+1)}{\Gamma(x+\beta'+k+1)} \quad (k=1,2,\ldots,m);$$

daher können wir x so groß wählen, daß

$$\left|\frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)}\, Q_k\right| < \frac{\delta}{3m}$$

ist. Wir haben nunmehr m und x so bestimmt, daß

$$\left|\frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)}\, T - A_0\,\Gamma(\beta+1)\right| < \delta$$

wird; folglich ist, da δ beliebig klein angenommen werden kann,

(12) $$\lim_{x=\infty} \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)}\, T = A_0\,\Gamma(\beta+1).$$

Wir wenden jetzt die Bestimmung dieses Grenzwertes auf die Untersuchung unseres Integrales

$$K_2 = \int_K t^{x-1}\, v(t)\, dt,$$

erstreckt über den durch b_i gehenden Kreis um a_i, an: In der Umgebung des Punktes a_i hatte $v(t)$ die Form

$$v(t) = \psi(t) + (a_i - t)^{\beta_i}\,\varphi(t),$$

worin $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in diesem Bereiche holomorphe Funktionen bedeuten; daher ist nach bekannten *Cauchy*schen Integralsätzen[1]):

$$K_2 = \int_K t^{x-1}(a_i - t)^{\beta_i}\,\varphi(t)\, dt = (1 - e^{2\pi i \beta_i}) \int_{b_i}^{a_i} t^{x-1}(a_i - t)^{\beta_i}\,\varphi(t)\, dt.$$

Wird $t = a_i z$ gesetzt, so erhält man

$$K_2 = (1 - e^{2\pi i \beta_i})\, a_i^{x+\beta_i} \int_{\frac{b_i}{a_i}}^{1} z^{x-1}(1-z)^{\beta_i}\,\varphi(a_i z)\, dz,$$

also mit Berücksichtigung des Grenzwertes (12):

$$\lim_{x=\infty} a_i^{-x} \frac{\Gamma(x+\beta_i+1)}{\Gamma(x)}\, K_2 = (1 - e^{2\pi i \beta_i})\, a_i^{\beta_i} A_0\,\Gamma(\beta_i+1).$$

1) Vgl. z. B. *Durège*, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe (4. Aufl. Leipzig 1893), 3. und 4. Abschnitt.

Nun war

$$u_i(x) = K_1 + K_2 + K_3;$$

ergibt sich endlich mit Rücksicht auf (6):

$$\lim_{x=\infty} u_i(x) = (1 - e^{2\pi i \beta_i}) A_0 \Gamma(\beta_i + 1) a_i^{\beta_i + x} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \beta_i + 1)}.$$

r haben zwar bei der Herleitung dieses Resultates vorausgesetzt, $\Re(\beta_i) > -1$ ist, es gilt aber auch für $\Re(\beta_i) \leqq -1$; denn wenn hinreichend oft partiell integriert, so führt die Untersuchung von auf Integrale von der Form

$$\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-q)}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+q)} \int t^{x-q-1}(1-t)^{\beta_i+q}\,dt,$$

nunmehr $\Re(\beta_i + q) > -1$ ist.

Integriert man auf dieselbe Weise um jeden der singulären nkte a_i, so erhält man n Lösungen $u_x^{(i)}$ $(\equiv u_i(x);\ i = 1, 2, \ldots, n)$ Differenzengleichung (1), welche sich für große reelle positive rte von x asymptotisch wie

$$c_i a_i^x x^{-\beta_i - 1} \quad (c_i \text{ Konstanten; } i = 1, 2, \ldots, n)$$

halten.[1]) Dieselben sind linear unabhängig, wenn $|a_1| > |a_2| > \cdots > |a_n|$ denn angenommen, es bestände eine Relation von der Form

$$\omega_x^{(1)} u_x^{(1)} + \omega_x^{(2)} u_x^{(2)} + \cdots + \omega_x^{(n)} u_x^{(n)} = 0,$$

in die $\omega_x^{(k)}$ periodische Funktionen von der Periode 1 sind, so zen wir $x + \nu$ an Stelle von x, worin ν eine ganze Zahl bedeutet, aß $\omega_{x+\nu}^{(k)} = \omega_x^{(k)}$ ist und die Relation jetzt folgendermaßen lautet:

$$\omega_x^{(1)} u_{x+\nu}^{(1)} + \omega_x^{(2)} u_{x+\nu}^{(2)} + \cdots + \omega_x^{(n)} u_{x+\nu}^{(n)} = 0.$$

r dividieren nun diese Gleichung durch $a_1^{x+\nu}(x+\nu)^{-\beta_1-1}$ und sen darauf ν unendlich groß werden; dann folgt mit Berücksichung der obigen asymptotischen Werte für alle x mit etwaiger Ausme diskreter Punkte $\omega_x^{(1)} c_1 = 0$, wo c_1 eine von Null verschiedene nstante ist, also identisch $\omega_x^{(1)} = 0$ [2]), sodaß in der fraglichen ation das erste Glied unterdrückt werden kann. Dividiert man selbe dann durch $a_2^{x+\nu}(x+\nu)^{-\beta_2-1}$ und läßt wieder ν unendlich

1) Vgl. den Ausdruck für $\Gamma(x)$ im 10. Kap., I, B, S. 237.

2) Dabei schließen wir solche periodischen Funktionen aus, die nur an kreten Stellen von Null verschieden sind.

groß werden, so folgt $\omega_x^{(2)} = 0$; ebenso zeigt man, daß auch $\omega_x^{(3)} = 0, \ldots,$ $\omega_x^{(n)} = 0$ sein muß. Dieser Beweis gilt auch noch, wenn mehrere Wurzeln a_i der „charakteristischen" Gleichung gleichen absoluten Betrag haben (ohne einander gleich zu sein), falls nur die zugehörigen Exponenten β_i verschiedene reelle Teile besitzen; denn ist z. B.

$$|a_{k_1}| = |a_{k_2}| = \cdots = |a_{k_s}|,$$

so können wir sie uns so geordnet denken, daß

$$\Re(\beta_{k_1}) < \Re(\beta_{k_2}) < \cdots < \Re(\beta_{k_s})$$

ist, und dann die obige Schlußweise anwenden.

An Stelle des oben angegebenen Integrationsweges hätte man auch den folgenden wählen können: es sei c_i ein Punkt des kleinen Kreises um a_i derart, daß $|c_i| > |a_i|$ ist; von c_i ziehen wir eine Gerade L, die sich bis ins Unendliche erstreckt und durch keinen singulären Punkt hindurchgeht, und integrieren von ∞ längs L bis c_i, durchlaufen die Peripherie des Kreises um a_i und gehen dann wieder von c_i längs L nach ∞. Ein auf diese Weise definiertes Integral genügt der Differenzengleichung (1) in einer Halbebene *links* von der durch $\Re(x - \xi) = 0$ bestimmten Geraden, worin ξ diejenige Wurzel von $P_n(x) = 0$ ist, welche den kleinsten reellen Teil besitzt: dann sind nämlich die Bedingungen (3) erfüllt. Durch dieselbe Untersuchungsmethode wie oben[1]) findet man, daß für sehr große negative Werte von x die Lösungen der Gleichung (1) sich wie

$$(1 - e^{2\pi i \beta_i}) A_0 \Gamma(\beta_i + 1) a_i^{\beta_i + x} \frac{\Gamma(-x - \beta_i)}{\Gamma(1 - x)},$$

d. h. wie

$$c_i a_i^x x^{-\beta_i - 1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

verhalten, *also ebenso wie für große positive x*.

Wenn die Differenzen zwischen einigen der Größen α_i ganze Zahlen sind, so wird $v(t)$ in der Umgebung des Punktes $t = 0$ durch Reihen von der Form $t^{\alpha_i} (\log t)^{\gamma} \varphi(t)$ dargestellt, wo $\varphi(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorph ist. In diesem Falle ändert sich nichts an der vorhergehenden Entwickelung, da $v(t) t^{-\alpha_p + 1}$ auf dem Integrationswege überall endlich bleibt. — Ist ferner β_i eine ganze Zahl $\geq p - 1$, so ist $v(t)$ in der Umgebung von a_i holomorph, also das längs des Weges um a_i erstreckte Integral $u_i(x)$ identisch Null: in diesem Falle kann man den vorher gewählten Integrationsweg durch die Strecke

1) Man hat nur in dem dort betrachteten Integral T die untere Grenze größer als 1 anzunehmen und die reziproke Substitution $t = \frac{1}{u}$ auszuführen.

von 0 bis a_i ersetzen, da in diesen beiden Punkten die Bedingungen (3) erfüllt sind; $u_i(x)$ verhält sich dann für große positive Werte von x wie

$$A_0 \, a_i^{\beta_i + x} \frac{\Gamma(\beta_i + 1)\,\Gamma(x)}{\Gamma(x + \beta_i + 1)}.$$

Betreffs der übrigen Ausnahmefälle (β_i eine ganze positive oder negative Zahl $< p - 1$; einige Wurzeln a_i einander gleich bzw. 0 oder ∞[1])) müssen wir auf die Arbeit von *Nörlund* selber verweisen (**3.**, S. 11 ff.).

Bisher haben wir bei der Bestimmung des Wertes von u_x für große Werte von x nur das *erste* Glied der Reihe $\varphi(t)$ in Betracht gezogen; man kann aber eine größere Annäherung erzielen, indem man die oben betrachteten Integrale in Fakultätenreihen entwickelt.[2]) Wir hatten

$$(13) \qquad u_i(x) = \int t^{x-1} (a_i - t)^{\beta_i} \varphi(t)\, dt,$$

das Integral erstreckt über den vorher angegebenen Weg, und

$$(14) \quad \varphi(t) = A_0 + A_1(a_i - t) + A_2(a_i - t)^2 + \cdots + A_m(a_i - t)^m + R_m(t);$$

die Reihe für $\varphi(t)$ konvergiert innerhalb eines Kreises um a_i, der durch den dem Punkte a_i nächsten singulären Punkt hindurchgeht. Wenn *ausnahmsweise* 0 *kein* singulärer Punkt von $v(t)$ ist und innerhalb dieses Kreises liegt, so erhält man, wenn man in (13) $\varphi(t)$ durch den Ausdruck (14) ersetzt und gliedweise integriert[3]):

$$(15) \quad u_i(x) = a_i^x \frac{\Gamma(\beta_i + 1)\,\Gamma(x)}{\Gamma(x + \beta_i + 1)} \left\{ A_0 + A_1 a_i \frac{\beta_i + 1}{x + \beta_i + 1} \right.$$
$$\left. + A_2 a_i^2 \frac{(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)}{(x + \beta_i + 1)(x + \beta_i + 2)} + \cdots \right\},$$

wobei von dem konstanten Faktor $(1 - e^{2\pi i \beta_i}) a_i^{\beta_i}$ abgesehen worden ist. Diese Reihe entspricht den Normalreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen; sie konvergiert im ganzen endlichen Teile der x-Ebene mit Ausnahme der einfachen Pole $-\beta_i - 1$, $-\beta_i - 2$, $-\beta_i - 3$, ... gleichmäßig.[4]) — Ist ferner 0 ein singulärer Punkt, der a_i von allen singulären Punkten am nächsten liegt, so konvergiert die Reihe (15) für $\Re(x + \alpha_p) > 0$, wo α_p die oben definierte Größe ist.[5])

1) In diesem Falle wird die Substitution $u_x = \Gamma^\mu(x)\, w_x$ gemacht und μ wie im *9. Kap.*, I, C durch das *Newton*sche Polygon bestimmt.

2) *Nörlund*, **3.**, § 10; *W.*

3) Vgl. Formel (6) der Einleitung zum *10. Kap.*

4) Vgl. *Pincherle*, **10.**, S. 226; *Nielsen*, **3.**, § 96, Satz V.

5) Vgl *Pincherle*, **11.** (Februar 1902); *Nielsen*, **3.**, § 95 u 96, Satz I u III.

Wenn dagegen diese speziellen Annahmen nicht zutreffen, so divergieren die Fakultätennormalreihen im allgemeinen; *sie stellen aber in diesem Falle das Integral der Gleichung* (1) *asymptotisch dar:* Setzt man nämlich

$$S_\nu(x) = a_i^x \frac{\Gamma(\beta_i+1)\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_i+1)} \Big\{ A_0 + A_1 a_i \frac{\beta_i+1}{x+\beta_i+1} + \cdots$$

$$\cdots + A_\nu a_i^\nu \frac{(\beta_i+1)(\beta_i+2)\cdots(\beta_i+\nu)}{(x+\beta_i+1)(x+\beta_i+2)\cdots(x+\beta_i+\nu)} \Big\},$$

so kann man zeigen, daß

$$\lim_{x=\infty} a_i^{-x} \frac{\Gamma(x+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(x)} \Big\{ u_i(x) - S_\nu(x) \Big\} = 0 \tag{16}$$

ist. Der Beweis wird ganz ähnlich geführt wie oben bei der Bestimmung des ersten Gliedes der Reihe für u_x für große Werte von x, nur daß hier statt *eines* Gliedes $\nu+1$ Glieder auf die linke Seite gebracht werden. Zunächst besteht wieder die Gleichung (6) zu Recht; daher ist, wenn $t = a_i z$ gesetzt wird, für sehr große Werte von x:

$$u_i(x) - S_\nu(x) = a_i^x \Big[\sum_{k=0}^{\nu} N_k + \sum_{k=\nu+1}^{m} Q_k + P \Big],$$

worin

$$N_k = -A_k a_i^k \int_0^\varepsilon z^{x-1} (1-z)^{\beta_i+k}\, dz, \quad \Big(\varepsilon = \frac{b_i}{a_i} < 1\Big),$$

$$Q_k = A_k a_i^k \int_\varepsilon^1 z^{x-1} (1-z)^{\beta_i+k}\, dz,$$

$$P = \int_\varepsilon^1 z^{x-1} (1-z)^{\beta_i} R_m(a_i z)\, dz$$

ist. Nun zeigt man genau wie vorher, daß nach Vorgabe eines beliebig kleinen δ für genügend große m $(>\nu)$ bei *allen* Werten von x

$$\left| \frac{\Gamma(x+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(x)} P \right| < \frac{\delta}{3}\text{ [1]},$$

und für genügend große x

$$\left| \frac{\Gamma(x+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(x)} N_k \right| < \frac{\delta}{3(\nu+1)}, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, \nu),$$

---

[1] Vgl. Gleichung (9); man braucht nur P in der Form zu schreiben:

$$P = \int_\varepsilon^1 z^{x-1} (1-z)^{\beta_i+\nu} R_m\, dz.$$

sowie

$$\frac{\Gamma(x+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(x)} Q_k < \frac{\delta}{3(m-\nu)}, \quad (k=\nu+1, \nu+2, \ldots, m)$$ [1]

ist. Für hinreichend große Werte von m und x ist also

$$\left| a_i^{-x} \frac{\Gamma(x+\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(x)} \left\{ u_i(x) - S_\nu(x) \right\} \right| < \delta,$$

womit die Gleichung (16) bewiesen ist.

IV. Differenzengleichungen beliebiger Ordnung, deren Koeffizienten Fakultätenreihen sind: Normalform; Integration durch konvergente Fakultätenreihen.[2]

An die Spitze dieser Untersuchung stellen wir zwei wichtige Sätze über Fakultätenreihen, für deren Beweis wir aber auf die Quellen verweisen müssen.

Satz I: Die Fakultätenreihe

$$\Omega(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!\, a_r}{x(x+1)\cdots(x+r)},$$

welche für $\Re(x) > \lambda$ unbedingt konvergiert[3]*, kann in die Fakultätenreihe*

$$\Omega(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!\left[a_r + \binom{y}{1}a_{r-1} + \binom{y+1}{2}a_{r-2} + \cdots + \binom{y+r-1}{r}a_0\right]}{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+r)}$$

transformiert werden; dieselbe konvergiert

$$\begin{aligned} &\textit{für}\ \Re(x) > 0, \quad \Re(x) > \lambda, \quad \textit{wenn}\ \Re(y) \geqq 0, \\ &\textit{für}\ \Re(x+y) > 0, \quad \Re(x+y) > \lambda, \quad \textit{wenn}\ \Re(y) < 0 \end{aligned}$$

ist.

Den *Beweis* dieses Satzes findet man bei *Nielsen*, **3.**, § 98; er wird in der Weise geführt, daß $\Omega(x)$ als Integral von der Form $\int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt$ dargestellt und dieses dann durch das Integral $\int_0^1 \varphi(t)\, t^{-y} \cdot t^{x+y-1}\, dt$ ersetzt wird, welches wieder in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann. — Ein zweiter Beweis, der nicht auf die Integraldarstellung

1) Vgl. Gleichung (11).
2) *Nörlund*, **2.**, **4.** und briefliche Mitteilung an den Verf. *W.*
3) Hierbei sind — wie auch im folgenden — die Punkte $x = 0, -1, -2, \ldots$ stets auszuschließen.

der Fakultätenreihe rekurriert, stützt sich auf die Betrachtung der Doppelreihe $\sum_{r,s=0}^{\infty} u_{r,s}$, wo

$$u_{r,r+s} = \frac{(r+s)!\,y(y+1)\cdots(y+s-1)\,a_r}{s!\,(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+r+s)}, \quad \text{wenn } s > 0,$$

$$u_{r,r+s} = 0, \quad \text{wenn } s < 0,$$

und

$$u_{r,r} = \frac{r!\,a_r}{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+r)}$$

ist, auf welche ein bekannter Satz von *Cauchy*[1]) angewendet wird.[2])

Satz II: Wenn eine Fakultätenreihe mit den „Koeffizienten" a_k

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,a_k}{(x+1)^{(k)}} \quad ((x+1)^{(k)} = (x+1)(x+2)\cdots(x+k);\ (x+1)^{(0)} = 1)$$

für $\Re(x) > \mu \geqq 0$ konvergiert, so ist

$$\mu = \limsup_{\nu=\infty} \frac{\log \left|\sum_{k=0}^{\nu} a_k\right|}{\log \nu}.\ ^{3)}$$

Dieser Satz gestattet, für $\Omega(x)$ eine *Majorantenreihe* aufzustellen: es sei nämlich ε eine beliebig kleine positive Größe, so folgt aus demselben, daß für alle ν oberhalb einer gewissen Schranke

$$\left|\sum_{k=0}^{\nu} a_k\right| < \nu^{\mu+\varepsilon}$$

ist. Nun ist aber, wie sich unmittelbar aus der Produktdarstellung der Gammafunktion ergibt[4]),

$$\lim_{\nu=\infty} \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-1)}\right| = \left|\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right| \nu^{\Re(\alpha-\beta)},$$

also insbesondere für $\alpha = \mu + \varepsilon + 1$, $\beta = 1$:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{(\mu+\varepsilon+1)(\mu+\varepsilon+2)\cdots(\mu+\varepsilon+\nu)}{1\cdot 2\cdots\nu} = \left|\frac{1}{\Gamma(\mu+\varepsilon+1)}\right| \nu^{\mu+\varepsilon};$$

daher läßt sich eine positive Zahl M derart angeben, daß für *sämtliche* Werte von ν

1) Analyse algébrique (1821), S. 541.
2) Briefliche Mitteilungen von *Nörlund* an den Verf. *W.*
3) *Landau*, **2.**, Satz VIII, S. 176.
4) *1. Kap.*, II, C; vgl. *Nielsen*, **3.**, § 21; *Landau*, **2.**, S. 159.

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_k < M \frac{(\mu+\varepsilon+1)(\mu+\varepsilon+2)\cdots(\mu+\varepsilon+\nu)}{1\cdot 2\cdots \nu}$$

wird. Wir betrachten nun die Reihe

$$\frac{M}{1-\frac{\mu+\varepsilon}{x}} = M\left(1+\frac{\mu+\varepsilon}{x+1}+\frac{(\mu+\varepsilon)(\mu+\varepsilon+1)}{(x+1)(x+2)}+\cdots\right)^{1)};$$

dieselbe konvergiert unbedingt für $\Re(x) > \mu$, besitzt lauter positive Koeffizienten, und die Summe ihrer $\nu+1$ ersten Koeffizienten ist für alle Werte von ν größer als der absolute Betrag der Summe der $\nu+1$ ersten Koeffizienten a_k der Reihe $\Omega(x)$, da ja, wie man leicht durch vollständige Induktion zeigt,

$$1+\frac{\mu+\varepsilon}{1}+\frac{(\mu+\varepsilon)(\mu+\varepsilon+1)}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{(\mu+\varepsilon)(\mu+\varepsilon+1)\cdots(\mu+\varepsilon+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots\nu}$$
$$=\frac{(\mu+\varepsilon+1)(\mu+\varepsilon+2)\cdots(\mu+\varepsilon+\nu)}{1\cdot 2\cdots\nu}$$

ist.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zu der Integration der Differenzengleichungen von der folgenden *Normalform:*

$$(1)\qquad P(u_x) \equiv \sum_{k=0}^{n} x(x-1)\cdots(x-k+1)\,p_x^{(k)}\,\nabla^k u_x = 0,$$

$$\left(p_x^{(n)} = 1,\ \text{Faktor von } p_x^{(0)} u_x \text{ gleich } 1\right),$$

worin

$$\nabla^k u_x = (-1)^k \Delta^k u_{x-k} = u_{x-k} - \binom{k}{1} u_{x-k+1} + \binom{k}{2} u_{x-k+2} - \cdots + (-1)^k u_x$$

ist und

$$(2)\qquad p_x^{(k)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{k_r}}{(x+1)^{(r)}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Fakultätenreihen sind, die für $\Re(x) > \mu$ unbedingt konvergieren.[2]) Nun ist, wie man leicht durch vollständige Induktion beweist, für eine beliebige Zahl ϱ:

---

1) Vgl. dieses Kap., I, A, **2.**, Beispiel (erste *Stirling*sche Formel).

2) Hierin ist der Fall enthalten, daß die $p_x^{(k)}$ *rationale* Funktionen sind, deren Zähler höchstens von demselben Grade wie der Nenner ist; denn man kann dieselben in Partialbrüche zerlegen und die einzelnen Partialbrüche nach den beiden *Stirling*schen Formeln (vgl. *10 Kap.,* I, A, **2.**, Schluß; bei mehrfachen Wurzeln des Nenners eventuell mit Zuhilfenahme des Satzes I) in Fakultätenreihen der oben angegebenen Form entwickeln.

$$(3)\qquad \nabla^k \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+1)} = \frac{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+k-1)}{x(x-1)\ldots(x-k+1)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+1)},$$

und daher

$$(4)\qquad P\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+1)}\right) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+1)} f(x, \varrho),$$

worin

$$f(x,\varrho) = \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+n-1) + \cdots + \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+k-1)p_x^{(k)} + \cdots + p_x^{(0)}$$

gesetzt worden ist; mittels der Reihen (2) läßt sich $f(x, \varrho)$ nach Satz I in eine Fakultätenreihe

$$f(x, \varrho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s(\varrho)}{(x+\varrho+1)^{(s)}}$$

entwickeln, welche in einem gewissen Gebiete konvergiert.

Wir wollen jetzt die vorgelegte Gleichung (1) durch eine Reihe von der Gestalt

$$(5)\qquad u_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+k+1)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(x+\varrho+1)^{(k)}} \qquad (c_0 \neq 0)$$

zu befriedigen suchen; es ergibt sich

$$P(u_x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+k+1)} f(x, \varrho+k) \quad \text{(s. Gl. (4))}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(x+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s(\varrho+k)}{\Gamma(x+\varrho+k+s+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho+k+1)} \{c_k f_0(\varrho+k) + c_{k-1} f_1(\varrho+k-1) + \cdots + c_0 f_k(\varrho)\}.$$

Zur Bestimmung der Größen c_k erhalten wir daher die Gleichungen

$$(6)\qquad c_k f_0(\varrho+k) + c_{k-1} f_1(\varrho+k-1) + \cdots + c_0 f_k(\varrho) = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

für $k = 0$ wird

$$c_0 f_0(\varrho) = 0;$$

c_0 $(\neq 0)$ bleibt willkürlich, und ϱ bestimmt sich als Wurzel der „*determinierenden Gleichung*“

$$F(\varrho) \equiv f_0(\varrho) = 0,$$

wo

$$F(\varrho) = \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+n-1) + \cdots + \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+k-1)a_{k_0} + \cdots + a_{0_0}.$$

Ist nun ϱ eine Wurzel der determinierenden Gleichung, aus der keine andere Wurzel durch Addition einer positiven ganzen Zahl her-

vorgeht, so kann man aus dem Gleichungssystem (6) sukzessive [illegible] c_2, c_3, ... berechnen. Um eine formale Vereinfachung zu erzielen, setzen wir

$$u_x \; \frac{\Gamma(x \; [illegible] \; 1)}{\Gamma(x \; [illegible] \; \varrho \; [illegible])} \; [illegible];$$

dann genügt v_x der Differenzengleichung

$$(7) \qquad \sum_{k=0}^{n} (x+\varrho)(x+\varrho \; [illegible] \; 1) \cdots [illegible] \; \nabla [illegible] \; 0$$

$$(\bar{p}_x^{(n)} = 1; \text{ Faktor von } [illegible] \text{ gleich } 1),$$

worin $\bar{p}_x^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$ eine lineare Funktion von [illegible] $p_x^{(k+1)}, \ldots, p_x^{(n-1)}$ mit konstanten Koeffizienten ist; dies ergibt sich leicht, wenn man die Formel

$$\nabla^k z_x v_x = z_{x-k} \nabla^k v_x + k_1 \nabla z [illegible] \nabla [illegible] \; k_2 \nabla^2 [illegible] \nabla [illegible]$$

$$\cdots + k \nabla [illegible] \nabla [illegible] \quad \nabla [illegible]$$

sowie die Gleichung (3) berücksichtigt. Die Funktionen [illegible] sich daher in Fakultätenreihen [illegible], konvergent für $\Re(x) > \mu$, entwickeln, und diese [illegible] von der Form

$$[illegible] \sum [illegible]$$

transformieren, welche konvergent sind

für $\Re(x)$ [illegible] 0, $\Re$ [illegible]

für $\Re(x + \varrho$ [illegible] 0, $\Re$ [illegible]

ist (es ist nämlich [illegible] bzw. [illegible] und $y = \varrho$ [illegible] 1).

Die Differenzengleichung [illegible] Reihe von der Gestalt

$$(8) \qquad v_x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{(x + \varrho \; [illegible] \; 1) \cdots}$$

befriedigt; es ist also jetzt eine W[illegible] $F(\varrho) = 0$ gleich Null (d. h. k_0 [illegible] 0, [illegible] setzung durch keine positive ganze Za[illegible] die Rekursionsformel zur Berechnung [illegible]

1) Vgl. 2. *Kap.*, I, B.

rgenzbeweis geeigneten Form zu erhalten, schreiben wir die Gleiung (7) in der Gestalt

$$A(v_x) = B(v_x),$$

orin

$$A(v_x) = \sum_{k=1}^{n} b_{k_0}(x+\varrho)(x+\varrho-1)\cdots(x+\varrho-k+1)\nabla^k v_x \quad (b_{n_0}=1),$$

$$(v_x) = \sum_{k=1}^{n-1} q_x^{(k)}(x+\varrho-1)(x+\varrho-2)\cdots(x+\varrho-k+1)\nabla^k v_x + \frac{q_x^{(0)}}{x+\varrho} v_x,$$

$$\left(\text{Faktor von } q_x^{(1)}\nabla v_x \text{ gleich } 1\right),$$

d

$$q_x^{(k)} = (x+\varrho)(b_{k_0} - \bar{p}_x^{(k)})$$

$$d_{k_0} + \frac{d_{k_1}\cdot 0!}{x+\varrho+1} + \frac{d_{k_2}\cdot 1!}{(x+\varrho+1)(x+\varrho+2)} + \frac{d_{k_3}\cdot 2!}{(x+\varrho+1)(x+\varrho+2)(x+\varrho+3)} + \cdots$$

. Wenn dann ν Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet und eder

$$F(\nu) = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1) + \cdots$$
$$\cdots + b_{k_0}\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1) + \cdots + b_{1_0}\nu,$$

$$(x, \nu) = q_x^{(n-1)}\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-2) + \cdots$$
$$\cdots + q_x^{(k)}\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1) + \cdots + q_x^{(1)}\nu + q_x^{(0)}$$

setzt wird, so läßt sich $f(x, \nu)$ nach Satz I in eine Fakultätenreihe n der Form

$$(x, \nu) = f_0(\nu) + \frac{f_1(\nu)}{x+\varrho+\nu+1} + \frac{f_2(\nu)}{(x+\varrho+\nu+1)(x+\varrho+\nu+2)} + \cdots$$

twickeln, die dasselbe Konvergenzgebiet besitzt wie die oben hinschriebenen Reihen für die $\bar{p}_x^{(k)}$. Setzt man ferner

$$\frac{g_k(\nu)}{(\nu+k)!} = \frac{f_k(\nu)}{(\nu+k)!} + \frac{f_{k-1}(\nu)}{(\nu+k-1)!} + \cdots + \frac{f_0(\nu)}{\nu!},$$

erhält man für die Bestimmung der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die ekursionsformel

$$) \qquad F(\nu+1)c_{\nu+1} = g_0(\nu)c_\nu + g_1(\nu-1)c_{\nu-1} + \cdots + g_\nu(0)c_0,$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

erin sind die $g_\iota(\nu)$ lineare Funktionen der Größen $s_{k_\nu} = \sum_{l=0}^{\nu} d_{k_l}$ $= 0, 1, \ldots, n-1)$ mit *positiven* Zahlenkoeffizienten.

Wir ersetzen jetzt die s_{k_ν} durch Größen, welche positiv und dem absoluten Werte nach größer als dieselben sind, und wählen zu diesem Zwecke für $q_x^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ die folgende Majorantenreihe:

$$\frac{M}{1 - \frac{\lambda}{x+\varrho}} = M\left(1 + \frac{\lambda}{x+\varrho+1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{(x+\varrho+1)(x+\varrho+2)} + \cdots\right),$$

wo

$$\lambda = \mu' + \varepsilon + \Re(\varrho), \quad \text{wenn} \quad \Re(\varrho) \geqq 1,$$

$$\lambda = \mu' + \varepsilon + \quad 1 \quad, \quad \text{wenn} \quad \Re(\varrho) < 1$$

ist, während μ' die größere der beiden Zahlen 0 und μ bedeutet Alsdann betrachten wir die Majoranten-Differenzengleichung

$$(10) \qquad p\sum_{k=1}^{n}(x+\varrho)(x+\varrho-1)\cdots(x+\varrho-k+1)\nabla^k v_x$$

$$= \frac{M}{1-\frac{\lambda}{x+\varrho}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(x+\varrho-1)(x+\varrho-2)\cdots(x+\varrho-k+1)\nabla^k v_x + \frac{v_x}{x+\varrho}\right\},$$

worin p eine noch näher zu bestimmende positive Zahl ist; diese Gleichung wird formal durch eine Reihe von der Form

$$(11) \qquad v_x = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x+\varrho+1} + \frac{\gamma_2}{(x+\varrho+1)(x+\varrho+2)} + \cdots$$

befriedigt. An Stelle der „determinierenden Funktion“ $F(\nu)$ tritt $p\,\varphi(\nu)$, wo

$$\varphi(\nu) = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1) + \cdots + \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1) + \cdots + \nu$$

ist; diese Funktion verschwindet ebenso wie $F(\nu)$ für $\nu = 0$ und nimmt für alle positiven ganzzahligen ν positive Werte an. Der Rekursionsformel (9) für die c_ν entspricht eine solche für die γ_ν:

$$(12) \quad p\,\varphi(\nu+1)\,\gamma_{\nu+1} = h_0(\nu)\,\gamma_\nu + h_1(\nu-1)\,\gamma_{\nu-1} + \cdots + h_\nu(0)\,\gamma_0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

in welcher die Koeffizienten h_i sämtlich positiv und größer als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten g_i sind.

Wir bestimmen nun p derart, daß für alle positiven ganzzahligen ν

$$p\,\varphi(\nu) < F(\nu)$$

wird; das ist deshalb möglich, weil $F(\nu)$ für keine positive ganze Zahl verschwindet und

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\varphi(\nu)}{F(\nu)} = 1$$

ist.[1]) Wird dann noch γ_0 positiv und größer als c_0 angenommen, so ergibt sich aus (12) sukzessive $\gamma_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ als ein Bruch, dessen Zähler größer und dessen Nenner kleiner ist als der absolut genommene Zähler bzw. Nenner des aus (9) entspringenden Bruches für $c_{\nu+1}$; es ist daher für alle ν

$$c_\nu < \gamma_\nu.$$

Somit konvergiert die Reihe (8) und stellt eine Lösung der Differenzengleichuug (7) dar, falls die Reihe (11) konvergiert. Um dies zu prüfen, multiplizieren wir in der Gleichung (10) auf beiden Seiten mit $1 - \frac{\lambda}{x+\varrho}$ und setzen die Reihe (11) ein; dann erhalten wir mit Berücksichtigung der Formel (3):

$$p\left(1-\frac{\lambda}{x+\varrho}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\frac{\varphi(\nu)}{(x+\varrho+1)\cdots(x+\varrho+\nu)} = M\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu\frac{\psi(\nu)}{(x+\varrho)(x+\varrho+1)\cdots(x+\varrho+\nu)},$$

worin

$$\psi(\nu) = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-2) + \cdots + \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1) + \cdots + \nu + 1$$

ist. Durch Multiplikation mit $x + \varrho$ nimmt diese Gleichung die folgende Gestalt an:

$$p\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\frac{\varphi(\nu)}{(x+\varrho+2)\cdots(x+\varrho+\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\gamma_\nu}{(x+\varrho+1)\cdots(x+\varrho+\nu)}\{M\psi(\nu) + p(\lambda+1)\varphi(\nu)\};$$

die linke Seite dieser Gleichung,

$$p\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{\nu+1}\frac{\varphi(\nu+1)}{(x+\varrho+2)\cdots(x+\varrho+\nu+1)},$$

läßt sich nach Satz I in

$$p\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\gamma_{\nu+1}\varphi(\nu+1) - (\nu-1)\gamma_\nu\varphi(\nu)}{(x+\varrho+1)(x+\varrho+2)\cdots(x+\varrho+\nu)}$$

1) Von einer bestimmten endlichen Stelle $\nu = t$ an wird nämlich deswegen

$$\left|\frac{\varphi(\nu)}{F(\nu)}\right| < 2 \quad (\nu = t, t+1, t+2, \ldots);$$

es genügt daher, $p \leqq \frac{1}{2}$ und gleichzeitig kleiner als den kleinsten der (von Null verschiedenen) absoluten Beträge von $\frac{F(1)}{\varphi(1)}, \frac{F(2)}{\varphi(2)}, \ldots, \frac{F(t-1)}{\varphi(t-1)}$ zu wählen.

transformieren. Setzt man noch $\gamma_\nu = \nu!\,\gamma'_\nu$, so erhält man für die γ'_ν die Rekursionsformel

$$(\nu+1)\,\varphi(\nu+1)\,\gamma'_{\nu+1} = \left\{\frac{M}{p}\,\psi(\nu) + (\nu+\lambda)\,\varphi(\nu)\right\}\gamma'_\nu;$$

aus derselben ergibt sich

$$\frac{\gamma'_{\nu+1}}{\gamma'_\nu} = \frac{\nu^{n+1} + \left(\frac{n(n-1)}{2} + \lambda\right)\nu^n + \cdots}{\nu^{n+1} + \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)\nu^n + \cdots} = 1 + \frac{\lambda-n-1}{\nu} + \frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\left(\lim_{\nu=\infty}\varepsilon_\nu = 0\right).$$

Daher wird, wenn t_ν das $(\nu+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe (11) bezeichnet,

$$\frac{t_{\nu+1}}{t_\nu} = \frac{\nu+1+\left(1+\frac{1}{\nu}\right)(\lambda-n-1+\varepsilon_\nu)}{x+\varrho+\nu+1},$$

also

$$\lim_{\nu=\infty}\nu\left(1-\frac{t_{\nu+1}}{t_\nu}\right) = x+\varrho+1-(\lambda-n);$$

folglich konvergiert nach einem bekannten Kriterium[1]) die Reihe (11), falls

$$\Re(x+\varrho) > \lambda - n$$

ist, und hieraus folgt wiederum, daß die Fakultätenreihe (8) bzw. (5) konvergent ist

$$\text{für } \Re(x) > \mu' - n, \quad \text{wenn} \quad \Re(\varrho) \geqq 1,$$
$$\text{für } \Re(x+\varrho-1) > \mu' - n, \quad \text{wenn} \quad \Re(\varrho) < 1.$$

Aus unseren Entwicklungen fließt der folgende

Satz: Wenn für eine Differenzengleichung n^{ter} Ordnung von der Normalform (1), deren Koeffizienten $p_x^{(k)}$ für $\Re(x) > \mu$ konvergente Fakultätenreihen sind, keine zwei Wurzeln der determinierenden Gleichung sich um eine ganze Zahl (inkl. 0) unterscheiden, so entsprechen ihren n Wurzeln ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n Fundamentallösungen[2]) $u_x^{(i)}$ von der Form (5), und zwar konvergiert $u_x^{(i)}$

$$\textit{für } \Re(x) > \mu' - n, \quad \textit{wenn} \quad \Re(\varrho_i) \geqq 1,$$
$$\textit{für } \Re(x+\varrho_i-1) > \mu' - n, \quad \textit{wenn} \quad \Re(\varrho_i) < 1$$

ist; darin bedeutet μ' die größere der beiden Zahlen 0 und μ.

---

1) Vgl. *Weierstraß,* **1.**, Abschn. 5, Satz V—VII.

2) Daß die $u_x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ein Fundamentalsystem bilden, ergibt sich daraus, daß für große x die „Determinante dieser Funktionen" (vgl. *2. Kap.*, I, A)

$$D\left(u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(n)}\right) = x^{\frac{n(n-1)}{2} + a_{n-1_0}}(c+\delta_x), \quad c \neq 0, \quad \lim_{x=\infty}\delta_x = 0,$$

ist, sodaß D *nicht identisch verschwindet. (W.)*

Auf den Fall, daß einige Wurzeln der determinierenden Gleichung sich um eine ganze Zahl (inkl. 0) unterscheiden, können wir hier nicht näher eingehen (vgl. *Nörlund*, **2.**).

Beispiele[1]:

1. $$\sum_{k=0}^{n} a_k x(x-1)\cdots(x-k+1)\nabla^k u_x = 0 \quad (a_k \text{ Konstanten, } a_n = 1).$$

Hier ist

$$f(x, \varrho) = f_0(\varrho) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+k-1);$$

daher ergibt sich, falls die Wurzeln ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der determinierenden Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ sämtlich von einander verschieden sind, unmittelbar aus Gleichung (4) als allgemeine Lösung unserer Differenzengleichung:

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho_i+1)},$$

worin die ω_i „Konstanten" (periodische Funktionen von der Periode 1) bedeuten.

2. $$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k + \frac{b_k}{x+1}\right) x(x-1)\cdots(x-k+1)\nabla^k u_x = 0$$

$(a_k$ und b_k Konstanten, $a_n = 1,\ b_n = 0)$.

Hier ist

$$f(x, \varrho) = f_0(\varrho) + \frac{f_1(\varrho)}{x+1},$$

worin

$$f_0(\varrho) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+k-1),$$

$$f_1(\varrho) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+k-1) \quad (\varrho^{(0)} = 1).$$

Wenn die Gleichungen $f_0(\varrho) = 0$ und $f_1(\varrho) = 0$ eine gemeinsame Wurzel ϱ_h besitzen, so wird für *alle* x

$$f(x, \varrho_h) = 0;$$

die Gleichung **2.** besitzt daher, wie unmittelbar aus (4) folgt, die Lösung $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\varrho_h+1)}$; wir können daher im folgenden diesen Fall aus-

[1] *Nörlund*, Briefliche Mitteilung an den Verf. *W.* u. **4.**

schließen. — Mit Berücksichtigung der aus dem Satze I oder aus der ersten *Stirling*schen Formel (*10. Kap.*, I, A, **2.**, Schluß) folgenden Entwicklung

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+s-1)}{(x+\varrho+1)(x+\varrho+2)\cdots(x+\varrho+1+s)} \qquad (\varrho^{(0)}=1)$$

ergibt sich nun

$$f_{s+1}(\varrho) = \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+s-1)f_1(\varrho) \quad (s=1,2,3,\ldots).$$

Aus der Rekursionsformel (6) erhält man daher für jede Wurzel ϱ der determinierenden Gleichung $f_0(\varrho)=0$, deren Wurzeln sich nicht um ganze Zahlen (inkl. 0) unterscheiden mögen, zur sukzessiven Berechnung der Koeffizienten c_k die Gleichungen:

$$c_1 f_0(\varrho+1) + c_0 f_1(\varrho) = 0, \qquad (f_1(\varrho) \neq 0),$$
$$c_2 f_0(\varrho+2) + c_1 f_1(\varrho+1) + c_0\,\varrho f_1(\varrho) = 0,$$
$$c_3 f_0(\varrho+3) + c_2 f_1(\varrho+2) + c_1(\varrho+1) f_1(\varrho+1) + c_0\,\varrho(\varrho+1) f_1(\varrho) = 0,$$

usf.

Wählt man $c_0 = -\frac{1}{f_1(\varrho)}$, so ergibt sich

$$c_1 = \frac{1}{f_0(\varrho+1)}, \quad c_2 = \frac{\varrho f_0(\varrho+1) - f_1(\varrho+1)}{f_0(\varrho+1) f_0(\varrho+2)},$$
$$c_3 = \frac{(\varrho f_0(\varrho+1) - f_1(\varrho+1))((\varrho+1) f_0(\varrho+2) - f_1(\varrho+2))}{f_0(\varrho+1) f_0(\varrho+2) f_0(\varrho+3)};$$

usf.

Ist daher

$$f_0(\varrho) = (\varrho-\alpha_1)(\varrho-\alpha_2)\cdots(\varrho-\alpha_n),$$
$$\varrho f_0(\varrho+1) - f_1(\varrho+1) = (\varrho-\beta_0)(\varrho-\beta_1)\cdots(\varrho-\beta_n),$$

so erhält man folgende Lösung der Differenzengleichung **2.**:

$$u_x^{(1)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\alpha_1+1)} \cdot$$
$$\cdot\left\{-\frac{1}{f_1(\alpha_1)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\,\frac{(\alpha_1-\beta_0)\cdots(\alpha_1-\beta_n)\cdots(\alpha_1-\beta_0+\nu-2)\cdots(\alpha_1-\beta_n+\nu-2)}{(\alpha_1-\alpha_2+1)\cdots(\alpha_1-\alpha_n+1)\cdots(\alpha_1-\alpha_2+\nu)\cdots(\alpha_1-\alpha_n+\nu)} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{1}{(x+\alpha_1+1)\cdots(x+\alpha_1+\nu)}\right\}$$

und $n-1$ analoge Lösungen $u_x^{(2)}, u_x^{(3)}, \ldots, u_x^{(n)}$, die zusammen ein Fundamentalsystem der Gleichung **2.** bilden.

Schlußbetrachtung:

Wenn wir die bisherigen Entwickelungen (*1. Teil*, 1. Kap. und *2. Teil*) noch einmal zusammenfassend überschauen, so ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß die von uns betrachteten Differenzen-

gleichungen im allgemeinen ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzen, welche *eindeutige* transzendente Funktionen mit unendlich vielen „kongruenten" Polen und der wesentlich singulären Stelle ∞ sind.[1]) Dabei tritt an Stelle des in den Integralen der linearen Differentialgleichungen auftretenden vieldeutigen Faktors x^α (α beliebige Konstante) der *eindeutige* Faktor $\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}$ bzw. $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\alpha+1)}$ und an Stelle des vieldeutigen $\log x$ die *eindeutige* Funktion $\Psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.[2])

Schließlich sei noch einmal ausdrücklich auf die hervorragende Bedeutung der aus der *Laplace*schen Transformation hervorgehenden Integrale von der Form $\int\limits_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt$ für die Lösung der linearen Differenzengleichungen hingewiesen: aus denselben ergibt sich durch Entwickelung von $\varphi(t)$ in eine nach Potenzen von t fortschreitende Potenzreihe und gliedweise Integration die *Partialbruchreihe*, durch wiederholte partielle Integration oder auch durch Entwickelung der Funktion $\varphi(t)$ nach Potenzen von $1-t$ und gliedweise Integration sowie Anwendung der *Euler*schen Formel (*10. Kap.*, Einleitung, Gleichung (6)) die *Fakultätenreihe* und endlich mittels der Binomialentwickelung für $t^{x-1} = (1-(1-t))^{x-1}$ durch gliedweise Integration die *Binomialreihe*; natürlich ist in jedem Falle die Konvergenz der betreffenden Reihe zu untersuchen.

1) Vgl. *Barnes*, **2.** und **3.**

2) Einfachster Fall: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x}y$ besitzt das Integral $y = cx^\alpha$, die Differenzengleichung $\Delta y_x = \frac{\alpha}{x}y_x$ oder $y_{x+1} = \frac{x+\alpha}{x}y_x$ die Lösung $y_x = \omega_x\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}$ $(\omega_{x+1} = \omega_x)$; ferner die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ das Integral $y = \log x + c$, die Differenzengleichung $\Delta y_x = \frac{1}{x}$ die Lösung $y_x = \Psi(x) + \omega_x$. Übrigens verhält sich für große x die Funktion $\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}$ wie cx^α (c Konstante) und $\Psi(x)$ wie $\log x$ (vgl. *10. Kap.*, I, B, Ausdruck für $\mu(x)$ und $\Gamma(x)$).

Literaturverzeichnis.[1])

Abel, N. H.

1. a) Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales finies.
b) L'intégrale finie $\sum^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple. Magazin for Naturv. a) **1**² (1823), b) **3**² (1825). Werke, Bd. I, a) S. 11—27, b) S. 34—39 (Kristiania 1881).

Amaldi, U.

1. Siehe *Pincherle,* **9.**

Andoyer, H.

1. Calcul des différences et interpolation. Encyclop. des sciences math., t. I, vol. **4**, 47—160. (Paris und Leipzig 1906.) Französische Bearbeitung der deutschen Artikel von *D. Seliwanoff* (**1.**) und *J. Bauschinger.*

André, D.

1. Terme général d'une série quelconque, déterminée à la façon des séries récurrentes. Ann. de l'Éc. Norm. (2) **7**, 375—408 (1878).
2. Liste et résumé des principaux travaux mathématiques de D. André. Paris 1904.

Appell, P.

1. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes. Math. Ann. **19**, 84—102 (1882).
2. Sur les fonctions périodiques de deux variables. (Liouville) Journ. de Math. (4) **7**, 157—219, Kap. I (1891).

Barnes, E. W.

1. On functions generated by linear difference equations of the first order. London M. S. Proc. (2) **2**, 280—292 (1904).
2. The linear difference equations of the first order. London M. S. Proc. (2) **2**, 438—469 (1904).
3. On the homogeneous linear difference equation of the second order with linear coefficients. Messenger of Math. **34**, 52—71 (1904).

Bateman.

1. The linear difference equation of the third order and a generalisation of a continued fraction. Quarterly Journ. **41**, 302—308 (1910).

---

1) In dieses Literaturverzeichnis haben wir auch solche Abhandlungen aufgenommen, die mit der Theorie der linearen Differenzengleichungen in näherem Zusammenhange stehen, insbesondere diejenigen, welche in unserem Buche mehrfach zitiert werden; nicht aufgenommen dagegen wurden mit wenigen Ausnahmen die Arbeiten über *nicht* lineare, über partielle, gemischte und simultane Differenzengleichungen sowie über Funktionalgleichungen. In der Bezeichnung der Zeitschriften folgen wir im allgemeinen dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik".

Binet, J.

1. Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres. Journ. de l'École Polytechn. **27**, 123—343; C. R. **9**, 39—45 (1839).

2. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies à une seule variable, d'un ordre quelconque, et à coefficients variables. Mém. de l'Institut de France (2) **19** (1845 [1843]), 639—754.

Boole, G.

1. A Treatise on the calculus of finite differences. 1. Auflage Cambridge 1860; 2. Auflage London 1872; 3. Auflage 1880. Deutsche Bearbeitung: „Die Grundlehren der endlichen Differenzen- und Summenrechnung". Von *H. Schnuse* (Braunschweig 1867).

Bortolotti, E.

1. Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze. Annali di Mat. (2) **23**, 309—344 (1895).

2. Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_1, 254—261 (1896).

3. La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_1, 349—356 (1896).

4. Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 257—265; 7_2, 46—55 (1898).

5. Le operazioni equivalenti alle loro aggiunte. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 74—82 (1898).

Brajtzew, J. R.

1. Über einige durch bestimmte Integrale integrierbare lineare Differential- und Differenzengleichungen. Warschau Polyt. 1900, Nr. 1, 2, S. 1—136; 1901, Nr. 1, 2, S. 137—303. (Russisch.)

2. Zur Frage der Integration der Systeme simultaner Differential- und Differenzengleichungen durch bestimmte Integrale. Moskau Math. Samml. **22**, 154—180 (1901). (Russisch.)

3. Methode zur Integration der linearen Differenzengleichungen durch unendliche Reihen. Moskau Math. Samml. **22**, 285—294 (1901). (Russisch.)

Brisson.

Die von *Cauchy* (**1.**) erwähnten hierher gehörigen Arbeiten von *Brisson* (etwa um 1800) sind wahrscheinlich nicht veröffentlicht worden (vgl. *Mansion*, **1.**, Einleitung).

Broggi, U.

1. Sur une intégrale aux différences. Ens. math. **11**, 120—123 (1909).

Casorati, F.

1. a) Il calcolo delle differenze finite etc. Rom. Acc L. Mem. (3) **5**, 195—208 (1880).
b) Il calcolo delle differenze finite etc. Annali di Mat. (2) **10**, 10—45 (1880).

Catalan, E.

1. Note sur une équation aux différences finies. Journ. de Math. (Liouville) **3**, 508—516 (1838).

Cauchy, A. L.

1. Sur l'analogie des puissances et des différences. Oeuvres (2) **7**, 198—235; 236—254 (Paris 1827).

Cayley, A.

1. On the general equation of differences of the second order. Quart. Journ. **14**, 23—25 (1877).
2. Papers **10**, Cambridge 1896, 47—49.

Combescure, E.

1. Sur quelques questions qui dépendent des différences finies ou mêlées. Ann. de l'Éc. Norm. (2) **3**, 305—362 (1874)

Epsteen, S.

1. On linear homogeneous difference equations and continuous groups. Bulletin of the American Math. Soc. (2) **10**, 499—504 (1903/4).

Esclangon, E.

1. Sur les solutions périodiques de certaines équations fonctionnelles. Comptes Rendus, 20. Jan. 1908.
2. Sur les solutions périodiques d'une équation fonctionnelle linéaire. Comptes Rendus, 20. Juli 1908.

Euler, L.

1. Correspondance math. et phys. Bd. I (1729).
2. a) Institutiones calculi differentialis (1755; 2. Aufl. 1787).
   b) Institutiones calculi integralis (1768—1770; 2. Aufl. 1792—1794).
3. Opera posthuma Bd. I, 408—438 (1861); vgl. *Darboux* Bull (2) **4**, 209—256 (1880).

Die weitere Literatur von *Euler* siehe bei *Nielsen,* **3.**

Ford, W. B.

1. Sur les équations linéaires aux différences finies. Annali di Mat. (3) **13**, 263—328 (1907).
2. On the integration of the homogeneous linear difference equation of second order. American M. S. Trans. **10**, 319—336 (1909).

Galbrun.

1. Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. Comptes Rendus, 5. April 1909, 6. Dezember 1909.

Gauß, C. F.

1. Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc Comment Gotting. Bd. II, 1—46 (1812); Werke Bd. III. Deutsche Ausgabe von *H. Simon* (Berlin 1888).

Groth, Th.

1. Om Dekompositionen af lineäre homogene Differentsudtryk. Nyt Tidsskrift for Math. **16** B, 1—6 (1905)

Guichard, C.

1. Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1)-G(x)=H(x)$. Ann. de l'École Norm. (3) **4**, 361—380 (1887).

Guldberg, A.

1. Sur les équations linéaires aux différences finies. Comptes Rendus **137**, a) 560, b) 614 (1903).
2. Sur les groupes de transformations des équations linéaires aux différences finies. Comptes Rendus **137**, 639 (27. Oct. 1903).
3. a) Om lineære homogene Differentsligninger. Nyt Tidsskrift for Math. **15**, 25—28 (1904).
   b) Om lineære Differentsligninger af 2^{den} Orden. Nyt Tidsskrift for Math. **15**, 75 (1904).
4. Über lineare homogene Differenzengleichungen. Archiv der Math. u. Phys. (3) **8**, 278—281 (1904).
5. Über lineare homogene Differenzengleichungen, die gemeinsame Lösungen besitzen. Archiv for Math. og Naturv. (Kristiania) **26**, Nr. 1, 1—11 (1904).
6. Über die Zerlegung homogener linearer Differenzenausdrücke in irreduzible Faktoren. Archiv for Math. og Naturv. **26**, Nr. 14, 1—8 (1905).
7. Sur les équations linéaires aux différences finies. Annales de l'École Norm. (3) **21**, a) 309—319, b) 321—348 (1905).
8. Über lineare homogene Differenzengleichungen derselben Art. Prace mat.-fiz. **16**, 35—43 (1905).
9. Über reduzible lineare homogene Differenzengleichungen. Monatshefte für Math. u. Phys. **16**, 204—210 (1905).
10. Sur les communs multiples des expressions linéaires aux différences finies. Circolo Mat. di Palermo Rend. **19**, 1—6 (1905).
11. Über lineare Differenzengleichungen. Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. (Heidelberg 1904), 157—163 (1905).
12. On linear homogeneous difference equations. Messenger (2) **35**, 70—72 (1905).
13. Sobre las ecuaciones lineales de diferencias finitas. Revista trimestr. de Mat. **5**, Nr. 17, 23—24 (1905).
14. Über vollständig reduzible lineare homogene Differenzengleichungen. Archiv for Math. og Naturv. **27**, Nr. 15, 1—9 (1906).

. . . . .

15. Sur les équations aux différences qui possèdent un système fondamental d'intégrales. Comptes Rendus **137**, 400 (1903).
16. Sur certaines équations aux différences. Archiv for Math. og Naturv. **25**, Nr. 2, 1—11 (1903).
17. Über simultane lineare Differenzengleichungen. Prace mat.-fiz. **15**, 1—6 (1904).
18. Über Differenzengleichungen, die Fundamentallösungen besitzen. Journ. für die reine u. angew. Math. **127**, 175—178 (1904).
19. Mémoire sur les congruences linéaires aux différences finies. Annali di Mat. (3) **10**, 201—209 (1904).

Heine, E.

1. Handbuch der Kugelfunktionen. 2. Aufl. Berlin 1878; Bd. I, 4. u. 5. Kap.

Heymann, W.

1. Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen. Leipzig (Teubner) 1891.
2. Zur Theorie der Differenzengleichungen. Journ. für d. r. u. a. Math. **109**, 112—117 (1892).
3. Über Differential- und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von Gauß integriert werden können. Journ. für d. r. u. a. Math. **122**, 164—171 (1900).

Hölder, O.

1. Über die Eigenschaft der Gammafunktion, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. Math. Ann. **28**, 1—13 (1886).

Horn, J.

1. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Math. Ann. **53**, 177—192 (1900).

Hurwitz, A.

1. Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. Acta Math. **20**, 285—312 (1897).

Jensen, J. L.

1. Tidsskrift for Math. (4) **5**, 130; Aufgabe 451 (1881).
2. Om Raekkers Konvergens. Tidsskrift for Math. (5) **2**, 70—72 (1884).
3. Gammafunktionens Theori i elementær Fremstilling. Nyt Tidsskr. for Math. 2B, 33—72 (1891).

Kronecker, L.

1. Bemerkung über die Darstellung von Reihen durch Integrale. Journ. für d. r. u. a. Math. **105**, 345—354 (1889).

Kummer, E.

1. Über die hypergeometrische Reihe. Programm, Liegnitz 1834; Journ. für d. r. u. a. Math. **15**, 39—83, 127—172 (1836).
2. De integralibus definitis et seriebus infinitis. Journ. für d. r. u. a. Math. **17**, 210—217, 228—242 (1837).
3. Beitrag zur Theorie der Funktion $\Gamma(x)$. Journ. für d. r. u. a. Math. **35**, 1—4 (1847)

Lacroix, S. F.

1. Traité du calcul différentiel et intégral. Paris 1797/98 (4. Aufl. 1828). Deutsche Ausgabe von *Fr. Baumann*: Handbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin (Reimer) 1830. Anhang. (Traité des différences etc. Paris 1800.)

Lagrange, J. L.

1. Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes. Miscell. Taurin. **1** (1759 [1761]); Oeuvres, t. **1**, 23—36.
2. Recherches sur les suites récurrentes. Nouveaux Mém. de l'Ac. r. des Sc. et B.-L. de Berlin (1775), Oeuvres, t. **4**, 151—251.
3. Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes lorsque l'équation génératrice a des racines égales. Mém. de l'Ac. de Berlin 1792/3 [1798], 247—257; Oeuvres, t. **5**, 624—641.

Landau, E.

1. Zur Theorie der Gammafunktion. Journ. für d. r. u. a. Math. **123**, 276—283 (1901).
2. Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen. Münch. Ber. **36**, 151—218 (1906).

Laplace, P. S.

1. Théorie analytique des probabilités, Livre I, première partie (Paris 1812), Oeuvres **7**, 80 ff. (Paris 1886).

Legendre, A.-M.

1. Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies. Mém. de l'Institut de France **10**, 416—509 (1809).
2. Exercices de calcul intégral. Paris 1811—1819.
3. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. Paris 1825—1828.

Lerch, M.

1. Auflösung einiger Differenzengleichungen. Časopis **21**, 69—75 (1892). (Böhmisch.)
2. Verschiedenes über die Gammafunktion. Rozpravy **5**, Nr. 14, 37 S. (1896). (Böhmisch.)

Lindelöf, E.

1. Sur une formule sommatoire générale. Acta Math. **27**, 305—311 (1903).

Lindhagen, A.

1. Studier öfver Gammafunktionen. Dissertation, Stockholm 1887.

Malfatti, G. F.

1. Delle serie ricorrenti. Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) **3** (1786), mat. p. 571—663.

Mansion, P.

1. Note sur la première méthode de Brisson pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites. Mém. cour. de Belgique **22**, 1—32 (1872).

Markoff, A. A.

1. Differenzenrechnung (Russisch). Deutsche Übersetzung von *Th. Friesendorff* und *E. Prümm*. Leipzig (B. G. Teubner) 1896.

Mellin, H.

1. Zur Theorie der Gammafunktion. Acta Math. **8**, 37—80 (1886).
2. Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta Math. **9**, 137—166 (1887).
3. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. Acta Math. **15**, 317—384 (1891).
4. Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta Math **25**, 139—164 (1902).

Muir, Th.

1. On the general equation of differences of the second order. Philos. Magazin (5) **17**, 115—118 (1884).

Nielsen, N.

1. Recherches sur les séries de factorielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 409—453 (1902); C. R. 30. Dez. 1901, 20. Jan. 1902.
2. a) Les séries de factorielles et les opérations fondamentales. Math. Ann **59**, 355—376 (1904).
   b) Sur la multiplication de deux séries de factorielles. Rom. Acc. L. Rend. 17. Jan. 1904.
3. Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig (B. G. Teubner) 1906

Nörlund, E.

1. Sur la convergence des fractions continues. C. R 5. Okt. 1908.
2. Sur les équations aux différences finies. C. R. 15. Nov. 1909.
3. Fractions continues et différences réciproques. Acta Math. **34**, 1—108 (1910).
4. Bidrag til de lineære Differensligningers theori. Diss. Kopenhagen 1910

d'Ocagne, M.

1. Mémoire sur les suites récurrentes. Journ. de l'Éc. Polytechn. (1) **64**, 151 bis 224 (1894).

Oltramare, G.

1. Intégration des équations linéaires aux différences et aux différences mêlées. Assoc. Franç Marseille **20**, 66—82 (1891).

Le Paige, C.

1. (Note) sur une équation aux différences finies. Nouv. corresp. math. **2**, 301—302 (1876); **3**, 45—47 (1877).

Paoli, P.

1. Memoria sull' equazioni a differenze finite e parziali. Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) **2** II, mat. p. 787—845 (1784).
2. Sull' equazioni a differenze finite. Ibidem (1) **4** I, mat. p. 455—472 (1787).
3. Della integrazione dell' equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime. Ibidem (1) **8** II, mat. p. 575—657 (1799).
4. Sull' uso del calcolo delle differenze finite nella dottrina degl' integrali definiti. Ibidem (1) **20**, mat. p. 255—271 (1827).

Pascal, E.

1. Repertorium der höheren Mathematik. Deutsch von A. Schepp. Leipzig (B. G. Teubner) 1900. 1. Teil, Kap. X u XVIII, § 3—6. (2. Aufl. 1910)

Perron, O.

1. Über einen Satz des Herrn *Poincaré*. Journ. f. d. r. u. a. Math. **136**, 17—37 (1909).
2. Über die *Poincaré*sche lineare Differenzengleichung. Journ. f. d. r. u. a Math **137**, 6—64 (1909).
3. Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen. Math. Ann. **66**, 446 bis 487 (1909)
4. Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. (Vortrag, geh. a. d. Salzburger Naturf.-Vers. 22. Sept. 1909) Ber. d. Deutsch Math.-Ver **19**, 129—137 (1910).
5. Über lineare Differenzengleichungen Acta Math. **34**, 109—137 (1910)
6. Grundlagen für eine Theorie des *Jacobi*schen Kettenbruchalgorithmus. Math. Ann. **64**, 1—76 (1906).
7. Über die Konvergenz des *Jacobi*-Kettenalgorithmus mit komplexen Elementen. Münch Ber. **37**, 401—482 (1907).
8. Ein neues Konvergenzkriterium für *Jacobi*-Ketten zweiter Ordnung. Archiv der Math. u Phys. (3) **17**, 204—211 (1910).

Petersen, M. J.

1. Vorlesungen über Funktionentheorie. (Kopenhagen 1898).

Pincherle, S.

1. a) Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari alle differenze e viceversa. Lomb. Ist. Rend. (2) **19**, 559—562 (1886).
b) Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Rom. Acc. L. Rend. (4) **4**, 694—700, 792—799 (1888).
2. Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche. Bologna Mem. (4) **10**, 513—538 (1890).
3. Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. Acta Math. **16**, 341—363 (1893).
4. a) Sulle equazioni alle difference. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{3}_1$, 12—17, 99—105 (1894).
b) Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti. Battaglini Giornale **32**, 209—291 (1894).
5. Sulle soluzioni conjugate nelle equazioni lineari differenziali e alle differenze. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{4}_2$ 228—232 (1895).
6. Algebra delle forme lineari alle differenze. Bologna Mem. (5) **5**, 87—126 (1895)
7. Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{7}_1$, 230—234 (1898).
8. Sull' operazione aggiunta. Bolgna Rend. (nuova ser.) **2**, 130—139 (17. April 1898).
9. (Zusammen mit *Amaldi, U.*) Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi. Bologna 1901 (Kap. X).

---

10. Una trasformazione dei serie. Circolo Mat. Palermo Rend. **2**, 215—226 (1889).
11. Sulle serie di fattoriali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**, 139—144, 417—426 (1902).
12. Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **12**, 336—343 (1903).
13. Sur les fonctions déterminantes. Ann. de l'Éc Norm. (3) **22**, 9—68 (1905).

Plana, G. A. A.

1. Sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites. Mem Acc. Torino (1) **25**, 403—418 (1820).

Poincaré, H.

1. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American Journ. of Math. **7**, 213 ff. (1885).

Prym, F. E.

1. Zur Theorie der Gammafunktion. Journ. f. d. r u. a. Math. **82**, 165—172 (1876).

Scheefer, L.

1. Zur Theorie der Funktionen $\Gamma(z)$, $P(z)$ und $Q(z)$. Journ. f. d. r. u. a. Math. **97**, 230—242 (1884).

Schlömilch, O.

1. Archiv der Math. u. Phys. (Grunert) **4**, 171 (1844); Analytische Studien I, 45 (1848) (Produktdarstellung der Gammafunktion).
2. Kompendium der höheren Analysis. 2. Band (2. Aufl. Braunschweig 1874), Abschn. 2, VIII; 5 u. 6 (Leipz. Ber. 1859 (Abdr. in Ztschr. für Math. u. Phys. **4**, 390) u. 1. Nov. 1863).

Seliwanoff, D.

1. Differenzenrechnung. Enzyklop. der math. Wiss. **1**, 918—937 (1901).
2. Lehrbuch der Differenzenrechnung. Leipzig (B. G. Teubner) 1904.

Spitzer, S.

1. Neue Integrationsmethode für Differenzen-Gleichungen, deren Koeffizienten ganze algebraische Funktionen der unabhängig Veränderlichen sind. *Grunert*s Archiv der Math. u. Phys. **32**, 334—348 (1859).
2. Note bezüglich eines zwischen Differenzengleichungen und Differentialgleichungen stattfindenden Reziprozitätsgesetzes. *Grunert*s Archiv der Math. u Phys. **33**, 415—417 (1859).

Stephansen, E.

. Eine Bemerkung zur Theorie der linearen Differenzengleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten. Prace mat.-fiz. **16**, 31—33 (1905).

. Über die symmetrischen Funktionen bei den linearen homogenen Differenzengleichungen. Archiv for Math. og Nat. **27**, Nr. 6, 1—10 (1906).

Stirling, J.

. Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730.

Sylvester, J. J.

. On the integral of the general equation in differences. Philos. Mag. (4) **24**, 436—441 (1862).

. The story of an equation in differences of the second order. Philos. Mag. (4) **37**, 225—227 (1869) $(u_{x+1} = u_x + (x^2 - x) u_{x-1})$.

. Note on an equation in finite differences. Philos. Mag. (5) **8**, 120—121 (1879) $\left(u_x = \frac{u_{x-1}}{x} + u_{x-2}\right)$.

. John Hopkins Univ. Circ. **1**, 178 (1879—82).

. On the solution of a certain class of difference or differential equations. American Journ. **4**, 260—265, 321—326 (1881).

. Note on certain difference equations which possess an unique integral. Messenger (2) **18**, 113—122 (1888/89).

. Solution of question 11648. Math. Quest. Educ. Times **58**, 97—98 (1893).

Tagiuri, A.

. Sulla integrazione dell' equazione $\psi(n) = h\psi(n-1) + k\psi(n-2) + l$. Battaglini Giornale **31**, 95—118 (1893)

Tardy, P.

. Sulle equazioni lineari alle differenze. Ann. sc. mat. fis. (Tortolini) **1**, 337—341 (1850).

Thomae, J.

. Die Recursionsformel

$$(B + An)\,\varphi(n) + (B' - A'n)\,\varphi(n+1) + (B'' + A''n)\,\varphi(n+2) = 0$$

Zeitschr. für Math. u. Phys. **14**, 349—367 (1869)

. Integration der Differenzengleichung

$$(n + \varkappa + 1)(n + \lambda + 1)\Delta^2\varphi(n) + (a + bn)\Delta\varphi(n) + c\,\varphi(n) = 0.$$

Zeitschr. für Math. u. Phys **16**, 146—158, 428—439 (1871)

Torelli, G.

Trudi, N.

1. Napoli Rend. (1) **3**, 147—154, 175—177 (1864) (fast genau derselbe Titel wie in **3**).
2. Napoli Atti (1) **2**, No. 8, 1—25 (1865) (derselbe Titel wie in **3**).
3. Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl' integrali delle equazioni lineari così differenziali che a differenze finite. Battaglini Giornale (1) **7**, 76—97 (1869).

Vivanti, G.

1. Journ. sciencias math. astr. (Coïmbra) **11**, 167—172 (1892).

Wallenberg, G.

1. Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung. Ber. d. Berliner Math. Ges. **6**, 25—36 (1907).
2. Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Ber. d. Berliner Math. Ges. **7**, 50—63 (1908).
3. Zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen. Ber. d. Berliner Math. Ges. **8**, 22—26 (1908).
4. Zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen. Archiv der Math. u. Phys. (3) **14**, 210—222 (1909).
5. Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke. Archiv der Math. u. Phys. (3) **15**, 151—157 (1909).
6. Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Ber. der Berliner Math. Ges. **9**, 2—8 (1909).

Watson, G. N.

1. A note on the solution of the linear difference equation of the first order. Quart. Journ. **41**, 10—20 (1909).
2. On a certain difference equation of the second order. Quart. Journ. **41**, 50—55 (1909).

Webb, H. A.

1. On the solution of linear difference equations by definite integrals. Messenger of Math. **34**, 40—45 (1904).

Weber, H.

1. Über *Abels* Summation endlicher Differenzenreihen. Acta Math. **27**, 225—233 (1903).

Weierstraß, K.

1. Über die Theorie der analytischen Fakultäten. Journ. f. d. r. u. a. Math. **51**, 1—60 (1856). (Abhandlungen aus der Funktionenlehre (Berlin 1886), S. 183—260; Werke, Bd. **1**, 153—211).
2. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Berlin Abh. 1876. (Abhandlungen aus der Funktionenlehre (Berlin 1886), S. 1—52).

Zehfuß, D. G.

1. Über die Auflösung der linearen endlichen Differenzengleichungen mit variablen Koeffizienten. Zeitschr. für Math. u. Phys. **3**, 175—177 (1858).

Weitere Literaturangaben (besonders über ältere Arbeiten) findet man bei *Andoyer*, **1**, insbesondere S. 69, Note 48 (über rekurrente Reihen) und S. 73/74, Note 50 und 51.

Namenregister.

(Die beigefügten Zahlen bedeuten die Seitenzahlen.)

Sachregister.

(Die beigefügten Zahlen bedeuten die Seitenzahlen.)

Berichtigungen und Ergänzungen:

Zeile 18 v. o. hinter Anm. 1 einzuschalten: S. 8.

„ 16 v. o. lies C statt c.

„ 4 v. o. (Überschrift) lies „Vollständig“ statt „Vollständige“.

„ 4 v. u. lies $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ statt $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Anm. 1). Der erste Satz soll nach Berücksichtigung der unten folgenden Bemerkungen unterdrückt werden. Im zweiten Satze lies $H \leq \varepsilon$ statt $H < \varepsilon$.

Zeile 9 v. o. vor „kleineren“ einzuschalten „dem absoluten Betrage nach“.

Bemerkungen zum Satze von *Poincaré* (S. 202 ff.).

Um etwaige Komplikationen zu vermeiden, sollen die Grenz-
m durchweg in dem Sinne genommen werden, daß x von einem
$= \infty$
n Anfangswerte x_0 an in ganzzahligen Intervallen wächst:
$- \nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$; ebenso ist im Abschnitt D für den Grenz-
n zu nehmen $x = x_0 - \nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Diese Grenzwerte
$- \infty$
auch lediglich, welche in den folgenden Anwendungen vor-
.

Der Ausdruck „zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$“ (S. 205 ff.) bezieht sich
n auf die Werte von H, bedeutet also: $\varepsilon < H < \frac{1}{\varepsilon}$ (ebenso
uf die Werte von $\left|\frac{Z}{Y}\right|$).

Es ist noch der Fall zu berücksichtigen, daß für beliebig große
on x die Größe $H \leqq \varepsilon$ ist, ohne daß *beständig* $H \leqq \varepsilon$ bleibt.
$\leqq \varepsilon$ folgt:

$$|Y_x| \leqq \varepsilon\, |X_x|, \quad |Z_x| \leqq \varepsilon\, |X_x|,$$

den Gleichungen (10) und (11):

$$|Y_{x+1}| < |X_x| (\varepsilon |\beta| + \delta(1 + 2\varepsilon)),$$
$$|X_{x+1}| > |X_x| (|\alpha| - \delta(1 + 2\varepsilon)).$$

er ist

$$\left|\frac{Y_{x+1}}{X_{x+1}}\right| < \varepsilon \frac{|\beta| + \frac{\delta}{\varepsilon}(1 + 2\varepsilon)}{|\alpha| - \delta(1 + 2\varepsilon)}.$$

Analoges gilt für $\left|\frac{Z_{x+1}}{X_{x+1}}\right|$. Da $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\delta}{\varepsilon}$ endlich ist, wie aus der Bestimmungsgleichung für ε (S. 205) hervorgeht, so gibt es eine endliche positive Konstante h derart, daß, wenn $H_x \leqq \varepsilon$ ist, $H_{x+1} < h\varepsilon$ wird. Da die Größe H abnimmt, sobald sie größer als ε wird, so kann, wenn einmal $H_x \leqq \varepsilon$ ist, $H_{x+\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ nie größer als $h\varepsilon$ werden; daher ist wegen $\lim\limits_{x=\infty}\varepsilon = 0$ auch hier $\lim\limits_{x=\infty} H = 0$. (Vgl. *Horn* **1.**, S. 180).

4. Bei der Betrachtung des Quotienten $Q_1 = \left|\frac{Z_{x+1}}{Y_{x+1}}\right| : \left|\frac{Z_x}{Y_x}\right|$ für den Fall, daß $H_{x+\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ beständig größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ bleibt (S. 206), wähle man eine positive Größe σ' derart, daß $\left|\frac{\gamma}{\beta}\right| < \sigma' < 1$ ist, und bestimme ε' durch die Gleichung

$$\delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon'}\right)(1 + \sigma') = \sigma'|\beta| - |\gamma|;$$

falls man σ (< 1) gleichzeitig größer als $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ und $\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|$ genommen hat, kann man übrigens $\sigma' = \sigma$ wählen. Dann ist $\lim\limits_{x=\infty}\varepsilon' = 0$; ferner geht aus den Bestimmungsgleichungen für ε und ε' hervor, daß beständig entweder $\varepsilon' > \varepsilon$ oder $\varepsilon' \leqq \varepsilon$ ist. Im ersteren Falle kann man wegen $H > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon'}$ die Größe ε durch ε' ersetzen; d. h. es ist für $\varepsilon' < \left|\frac{Z}{Y}\right| < \frac{1}{\varepsilon'}$:

$$Q_1 < \frac{|\gamma| + \delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon'}\right)}{|\beta| - \delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon'}\right)},$$

also $Q_1 < \sigma' < 1$ und daher wegen $\lim \varepsilon' = 0$ auch $\lim \left|\frac{Z}{Y}\right| = 0$.

Ist dagegen $\varepsilon' \leqq \varepsilon$, so ist für $H > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon < \left|\frac{Z}{Y}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$:

$$Q_1 < \frac{|\gamma| + \delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)}{|\beta| - \delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)} \leqq \frac{|\gamma| + \delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon'}\right)}{|\beta| - \delta\left(1 + \frac{2}{\varepsilon'}\right)},$$

d. h. wieder $Q_1 < \sigma' < 1$ und daher $\lim \left|\frac{Z}{Y}\right| = 0$.